INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG VON

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVII. BAND FÜNFTES HEFT 1949

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 14.80

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 30—40 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Stuttgart N, Roseggerweg 8

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 2440

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Inhalt:

Seite

Steinbuch, Karl, Berechnung von Kolbentemperaturen. Mit 8 Textabbildungen 353

Grammel, Richard, Kritische Drehzahlen anisotrop gelagerter Läufer. Mit 2 Textabbildungen 363

Bammert, Karl, und *Heinz Kläukens*, Nabentotwasser hinter Leiträdern von axialen Strömungsmaschinen. Mit 36 Textabbildungen 367

Woinowsky-Krieger, Sergius, Zur Statik und Kinetik der Trägerroste. Mit 7 Textabbildungen 391

INGENIEUR-ARCHIV

XVII. BAND FÜNFTES HEFT 1949

Berechnung von Kolbentemperaturen*.

Von **K. Steinbuch.**

1. Einleitung. Den bisher ersten bekanntgewordenen Versuch, die Temperaturen an Kolben von Wärmekraftmaschinen vorauszuberechnen, machte *Emele*[1]. Bei dieser Arbeit erscheint das Verhältnis von mathematischem Aufwand zu sinnvoller Rechengenauigkeit etwas ungünstig. Im folgenden wird — nach einer Sichtung der Einflußgrößen — der Versuch unternommen, dem Praktiker ein Schema zur Berechnung von Kolbentemperaturen zu schaffen, das mathematisch so weit vereinfacht wurde, als die dem Problem angemessene Genauigkeit erlaubt.

Unter der Annahme, daß die vom Kolben aufgenommene Wärme durch die Ringzone zum Zylinder, durch den Schaft zum Zylinder und durch den Kolbenboden zur Gehäuseluft abfließt, sind zur Berechnung außer den eigentlichen Kolbendaten folgende „Einflußgrößen" erforderlich:

der Wärmeeinfall q [Kcal/m²h] (siehe Abschnitt 3),
die Wärmeübergangszahl α_m [Kcal/m²h grad] der Ringzone (siehe Abschnitt 5),
die Wärmeübergangszahl α_{SW} vom Schaft zur Zylinderwand (siehe Abschnitt 5),
die Wärmeübergangszahl α_{Bg} vom Kolbenboden zur Gehäuseluft (siehe Abschnitt 5),
die „Nulltemperatur" $\vartheta^*(0)$ [grad], Definition in Abschnitt 11,
die Temperatur Θ_g [grad] der Gehäuseluft (siehe Abschnitt 6).

2. Das vereinfachte Kolbenmodell. Der Kolben sei rotationssymmetrisch und wird bei der Rechnung in drei Teilen behandelt:

I. Der Kolbenboden. Für ihn sind drei Grundformen in der Rechnung vorgesehen:
a) der ebene Boden. Hierzu zählen sinngemäß auch gewölbte Böden mit gleichmäßiger Dicke;
b) der (Hohl-)kegelige Boden;
c) der Paraboloidboden. Hierzu zählen angenähert auch Böden mit einem „Innenradius".

II. Die Ringzone wird als Hohlzylinder mit einer mittleren Wärmeübergangszahl α_m zum Zylinder behandelt.

III. Die Schaftzone wird als Hohlzylinder mit der Wärmeübergangszahl α_{SW} zum Zylinder behandelt.

In der Rechnung treten immer wieder die Temperaturen an zwei bestimmten Punkten auf, die deshalb wie folgt definiert werden:

ϑ_I = Temperatur in Kolbenbodenmitte, gasseitig,

ϑ_{II} = Temperatur am Schnittpunkt der Mittellinie von Kolbenboden und Ringzone (siehe Abb. 1).

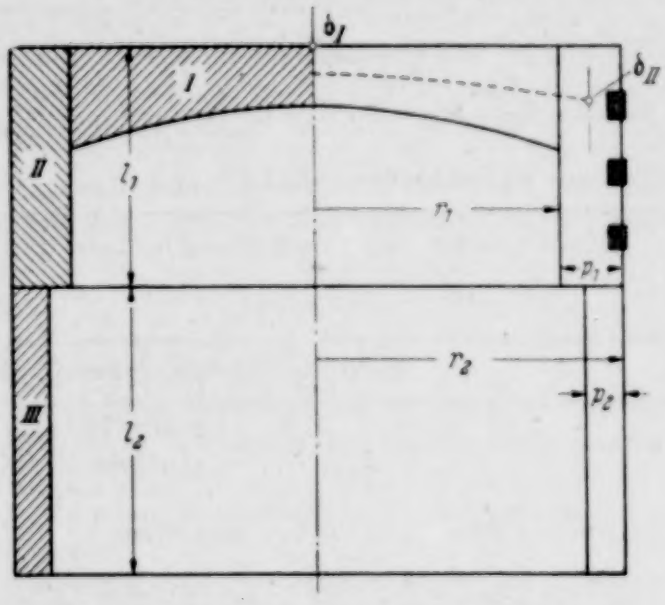

Abb. 1. Das vereinfachte Kolbenmodell.

3. Der Wärmeeinfall q (Kcal/m²h). Unter dem Wärmeeinfall q werde die Wärmemenge je Stunde verstanden, welche im zeitlichen Mittel durch die Flächeneinheit [m²] des Kolbenbodens einströmt. Wenn die Wärmestromdichte q an verschiedenen Punkten des Kolbenbodens auch verschieden sein mag, so sind wir von einer genaueren Kenntnis derselben so weit entfernt, daß die Berücksichtigung dieser Tatsache für die Praxis illusorisch wäre.

* Der Mahle KG., Stuttgart-Bad Cannstatt, verdanke ich die Anregung und technischen Unterlagen zu dieser Arbeit.

[1] *G. Emele*, Die Temperaturverteilung und Wärmeübergang bei Kolben. Diss. Karlsruhe 1931; ferner auszugsweise veröffentlicht im VDI-Dieselmaschinensonderheft V.

Versuche, q theoretisch vorauszuberechnen, schlugen fehl. Unter der Annahme, daß die Wärme durch Leitung (im engeren Sinn) auf den Kolben überginge, erhält man rechnerisch Werte für q, die um mehr als eine Zehnerpotenz zu klein sind.

Ebenso erhält man unter der Annahme, daß die Wärme durch Strahlung überginge, Werte von q, die ebenfalls um eine Zehnerpotenz zu klein sind.

Die Differenz zwischen diesen Werten und den tatsächlichen kann nur durch starke Gasbewegung während des Wärmeaustausches erklärt werden. Wie *Eichelberg*[1] feststellt, sind die wirklichen Strömungsverhältnisse im Zylinder zahlenmäßig nicht bekannt. Somit fehlen alle Voraussetzungen zur Berechnung von q. Dieses mußte deshalb aus dem radialen Temperaturabfall im Kolbenboden ermittelt werden. Die hierzu benötigten Formeln werden im Abschnitt 7 hergeleitet. Nachträglich wurde festgestellt, daß *Gibson*[2] bereits eine dieser Formeln angewandt hatte. Zur Auswertung eignen sich Kolben einfacher Bauform, bei denen die Ableitung durch die Gehäuseluft entweder bekannt ist, oder vernachlässigt werden kann. Es müssen hierzu die Temperaturen im Kolbenboden an zwei Stellen mit verschiedenem Abstand vom Mittelpunkt bekannt sein, die nicht zu nah am Schaftansatz liegen. Die eine Meßstelle ist zweckmäßigerweise die Bodenmitte. Einige Ergebnisse solcher Auswertungen sind in Tafel 1 dargestellt.

Tafel 1.

Quelle der Messung, Art des Kolbens und Motors	$q\left[\frac{\text{Kcal}}{\text{m2h}}\right]$
Luftgekühlter Motor, 1,47 Liter Hubraum, Verdichtungsverhältnis 5,5:1, inn. Leistung 35 PS, mittlere Brennraumtemperatur 650° C [Fußnote 3 (*Brecht*, Seite 39)]	79000
Derselbe Motor, Verdichtungsverhältnis 8:1, 660° C, 39,5 PS	155000
Motor 120, Luftkühlung 1,47 Liter, Verdichtungsverhältnis 5,5:1, effektive Leistung 25,8 PS [Fußnote 3 (*Brecht*, Seite 75)]	86000
Derselbe Motor mit Wasserkühlung, effektive Leistung 27,3 PS	130000
Schnellaufende Maschine, luftgekühlter AL-Zylinder, 100 mm Durchmesser, 140 mm Hub, 17,85 PS [Fußnote 2 (*Gibson*, Seite 3)]	263000
Derselbe mit vergrößertem Kolbenspiel, 17,90 PS	263000
Derselbe, Kolben aus anderer Leichtmetall-Legierung, 18,0 PS	260000
Derselbe, Graugußkolben, 17,05 PS	108000

Tafel 1 findet eine Erweiterung in Tafel 2, die gleichartige Ergebnisse von *Baker*[4] darstellt.

Tafel 2.

Quelle der Messung, Art des Kolbens und Motors	$q\left[\frac{\text{Kcal}}{\text{m2h}}\right]$
Gibson, 100 × 140 mm, 1800 U/min { flacher Boden	206000
Gibson, 100 × 140 mm, 1800 U/min { gewölbter Boden	200000
Jardine and *Jehle*, 127 × 178 mm, 800 U/min { 6,35 mm Boden	149000
Jardine and *Jehle*, 127 × 178 mm, 800 U/min { 9,5 mm Boden	146000
Baker, 305 × 457 mm, Diesel, 260 U/min, AL-„Mushroom"-Kolben	209000
Baker, 305 × 457 mm, Diesel, 260 U/min, „Jam-Pot"-Graugußkolben	216000
Gibson, 100 × 140 mm, 180 U/min, Graugußkolben	57800

[1] *G. Eichelberg*, Zeitlicher Verlauf der Wärmeübertragung im Dieselmotor. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 300.

[2] *A. H. Gibson*, Engineering Nr. 3135 vom 29.1. 1926 und Nr. 3136 vom 5. 2. 1926.

[3] *Brecht, Walter*, Kolbentemperaturen in Otto-Motoren. München und Berlin 1940.

[4] *H. Wright Baker*, Piston-Temperatures on a high-speed Air-cooled Petrol-Engine. (Literaturangabe im Auszug nicht ersichtlich.)

Den außerordentlich niederen Wert von q bei dem letzten Graugußkolben führt *Baker* auf die Nichtberücksichtigung der Ableitung durch die Gehäuseluft und Ölspritzer zurück. Doch braucht man sich dieser Auffassung nicht unbedingt anzuschließen, wahrscheinlich nehmen Graugußkolben infolge ihrer hohen Betriebstemperatur tatsächlich weniger Wärme auf.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß der Wärmeeinfall q bei normalen Verbrennungsmotoren im Bereich von 60000 bis 250000 Kcal/m²h liegt. Hohe Werte treten auf bei schnellaufenden Motoren, Dieselmotoren, hohem Verdichtungsverhältnis, hoher Wärmeleitfähigkeit des Kolbens, Wasserkühlung. Niedere Werte scheinen Motoren mit Graugußkolben und solche mit Luftkühlung zu haben.

Wahrscheinlich läßt sich durch systematische Messungen ein relativ einfacher Zusammenhang zwischen q und der indizierten Leistung je Einheit der Kolbenfläche finden, wenn man der Eigenart des betrachteten Motors durch Korrekturfaktoren Rechnung trägt.

4. Die Wärmeleitzahl λ [Kcal/m h grad] der Kolbenlegierungen. Über diese liegen viele Messungen vor. Für die im Kolbenbau wichtigsten Materialien sind die Werte in Tafel 3 zusammengestellt.

Tafel 3.

Kolbenbaustoff	$\lambda \left[\frac{\text{Kcal}}{\text{m h grad}}\right]$
AL-Si 12 Cu Ni	115 (gepreßt 122)
AL-Si 18 Cu Ni	101
AL-Cu 4 Ni Mg	122 (gepreßt 133)
AL-Cu 10	122
Grauguß	43
Aluminium	191
Eisen	50 bis 62
Stahl	22 bis 43
Magnesiumlegierungen . . .	54 bis 108

Die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitzahl untersuchten *Bollenrath* und *Bungardt*[1] und fanden an fünf verschiedenen Al-Legierungen im Intervall von 50 bis 350° C eine Zunahme der Wärmeleitzahl um 3 bis 6% für 100° C Temperatursteigerung.

5. Die Wärmeübergangszahlen α [Kcal/m²h grad]. Über diese liegen nur sehr mangelhafte Unterlagen vor. Es sind die Wärmeübergangszahlen an drei verschiedenen Stellen von Bedeutung:

α_{Bg}: vom Kolbenboden zur Gehäuseluft,
α_{SW}: vom Schaft zur Zylinderwand,
α_{KRW}: von der Ringzone über die Kolbenringe zur Zylinderwand.

Über α_{Bg} macht *Salzmann*[2] folgende Angaben: Nach *Eichelberg* und eigenen Versuchen bei einer Gehäuselufttemperatur von 50° C $\alpha_{Bg} \approx 54$ Kcal/m²h grad. Er hält die Angaben von *Emele* mit $\alpha_{Bg} = 180$ Kcal/m²h grad für sehr hoch. Dieser Unterschied braucht natürlich kein Widerspruch zu sein, verschiedene Motoren können naturgemäß wesentlich verschiedene Werte von α_{Bg} haben.

Wenn auch bezüglich der Wärmeübergangszahl α_{SW} (Schaft/Zylinderwand) nur wenige Messungen vorliegen (z. B. von *Salzmann*[2]), so ist dies deshalb nicht schlimm, weil sich α_{SW} aus dem Wärmewiderstand des Ölfilms zwischen Schaft und Zylinderwand berechnen läßt:

$$\alpha_{SW} = \frac{\lambda_{öl}}{\delta_{SW}} . \tag{1}$$

Dabei ist δ_{SW} das Kolbenspiel (in m) und $\lambda_{öl} = 0{,}12$ Kcal/m h grad. Bezüglich der Wärmeübergangszahl α_{KRW} (Ringzone/Ring/Zylinderwand) ist man auf die einzige vorliegende Messung von *Salzmann*[2] angewiesen. Er hat an einem großen Versuchsdieselmotor (280 mm Durchmesser, 420 mm Hub) im Betrieb mittels Thermoelementen den Temperaturverlauf innerhalb der Kolbenringe gemessen. Er findet, daß der Wärmewiderstand zwischen Kolbenring und Zy-

[1] *Bollenrath* und *Bungardt*, Metallwirtschaft (1936).
[2] *F. Salzmann*, Ing.-Wes. 4 (1933), S. 193.

linder sehr klein ist (entsprechend einer Ölfilmdicke von 5 μ). Den größten Anteil zu α_{KRW} liefert der Zugangswiderstand von der Ringzone zum Kolbenring. Als mittleren Wert gibt er an

$$\alpha_{KRW} = 3000 \text{ Kcal/m}^2\text{h grad}.$$

In Abschnitt **2** wurde vereinbart, für die Ringzone eine mittlere Wärmeübergangszahl α_m in Rechnung zu setzen. Wird mit F_R die an der Zylinderwand streifende Oberfläche der Ringe bezeichnet, mit F_K die entsprechende der dazwischenliegenden Kolbenteile, dann wird

$$\alpha_m = \frac{\alpha_{KRW} F_R + \alpha_{SW} F_K}{F_R + F_K} . \tag{2}$$

6. Die Randtemperaturen Θ [° C]. Unter den Randtemperaturen werden die Temperaturen der Medien in der Umgebung des Kolbens verstanden.

Die Gehäuselufttemperatur dürfte i. A. $\Theta_g = 50$ bis 100 [° C] betragen. Eine Fehlschätzung tritt zahlenmäßig nur wenig in Erscheinung. Für die Temperaturen der Zylinderinnenseite wurden folgende Mittelwerte empfohlen:

	Luftkühlung	Wasserkühlung
Zylinderoberteil	190 bis 240° C	160 bis 200° C
Zylinderunterteil	150 bis 180° C	100 bis 130° C

Die im folgenden benutzte „effektive" Zylindertemperatur muß aus diesen Werten durch Mittelwertsbildung gewonnen werden. Sie ist natürlich für jeden Umfang des Schaftes eine andere und wird zweckmäßigerweise als der zeitliche Mittelwert der Zylindertemperatur definiert, welcher dem betreffenden Kolbenumfang gegenübersteht. Diese „effektive" Zylindertemperatur ist jedoch mehr als eine reine Rechengröße: Wird ein kleiner Bereich des Kolbenschaftes thermisch von seiner Umgebung isoliert, während er jedoch mit der Zylinderwand in Berührung bleibt, dann nimmt er im Betrieb die für seinen Ort zuständige „effektive" Zylindertemperatur an. Sehr wertvoll sind in diesem Zusammenhang die Temperaturmessungen an den Schäften von Kolben, die durch Querschlitze thermisch vom Kolbenoberteil abgetrennt sind und so mit einiger Näherung die effektiven Zylindertemperaturen annehmen.

7. Die verschiedenen Bodenformen. Durch eine einfache Überlegung läßt sich zeigen, daß das Temperaturfeld im Kolben sich bei pulsierendem Wärmeeinfall genau so einstellt, wie wenn an der Oberfläche eine konstante Temperatur herrschen würde, die gleich dem zeitlichen Mittelwert der veränderlichen Temperatur ist. Die Pulsationen der Temperatur klingen in höchstens 0,5 cm Tiefe auf $^1/_{100}$ ihres ursprünglichen Wertes[1] ab.

Zur Berechnung der Temperaturen im Kolbenboden wird — vorläufig — der Wärmeabfluß durch die Gehäuseluft vernachlässigt und die Annahme gemacht, daß der Wärmestrom den Boden gleichmäßig erfülle. Für den Wärmeeinfall q ergibt sich (Abb. 2) beim Halbmesser r der Wärmestrom

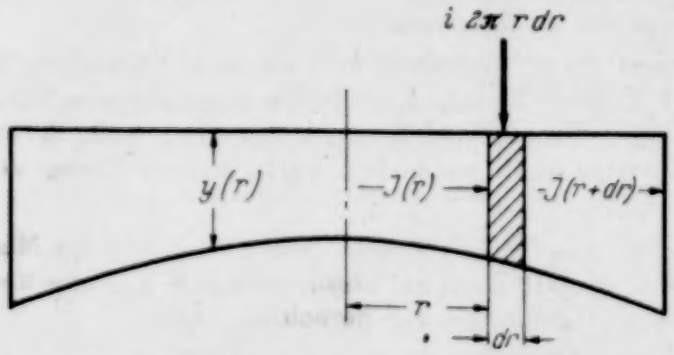

Abb. 2. Zur Ableitung des Wärmeflusses im Kolbenboden.

$$Q(r) = \int_0^r q\, 2\pi r\, dr = q\pi r^2 . \tag{3}$$

Andererseits ist, wenn mit $y(r)$ die Bodenstärke in Abhängigkeit von r bezeichnet wird,

$$Q(r) = -\lambda\, 2\pi r\, y(r)\, \frac{d\vartheta}{dr} .$$

Daraus folgt

$$\vartheta(r) = -\frac{q}{2\lambda} \int_r^{r_2} \frac{r\, dr}{y(r)} . \tag{4}$$

Diese Beziehung gilt für alle Bodenformen. Sie wird im folgenden für drei spezielle Formen ausgewertet.

a) Beim ebenen Boden ($y = \text{konst.} = y_0$) ergibt sich

$$\vartheta(r) = \vartheta_{II} + \frac{q}{4\lambda y_0} (r_2^2 - r^2) . \tag{5}$$

[1] Berechnet nach Formeln aus: *H. Gröber*, Temperaturverlauf und Wärmeströmung in periodisch erwärmten Körpern. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ing.-Wesens, Heft 300.

Dabei wurde $\vartheta(r_2) = \vartheta_{II}$ gesetzt. Dies steht zwar nicht ganz im Einklang mit der Definition im Abschnitt **2**, findet aber seine Rechtfertigung darin, daß die ganze Rechnung streng nur für extrem dünne Kolben gilt (wo dieser Gegensatz nicht mehr besteht), aber bei den im Kolbenbau möglichen Genauigkeitsansprüchen auch für dickere Kolben angenommen werden kann.

Der Wärmeeinfall q ergibt sich, wenn die Temperaturen an zwei Punkten mit den verschiedenen Halbmessern r_α und r_β gemessen wurden, zu

$$q = \frac{(\vartheta(r_\alpha) - \vartheta(r_\beta))\, 4\,\lambda\, y_0}{r^2_\alpha - r^2_\beta}. \tag{5a}$$

b) Beim kegeligen Boden (Abb. 3) ergibt sich mit $y = y_0 + r \operatorname{tg} \varphi$ aus (4)

$$\vartheta(r) = \vartheta_{II} + \frac{q}{2\,\lambda} \operatorname{ctg}^2 \varphi \left[\operatorname{tg} \varphi\,(r_2 - r) - y_0 \ln \frac{y_0 + r_2 \operatorname{tg} \varphi}{y_0 + r \operatorname{tg} \varphi} \right] \tag{6}$$

und

$$q = \frac{(\vartheta(r_\alpha) - \vartheta(r_\beta))\, 2\,\lambda \operatorname{tg}^2 \varphi}{\operatorname{tg} \varphi\,(r_\alpha - r_\beta) - y_0 \ln \dfrac{y_0 + r_\beta \operatorname{tg} \varphi}{y_0 + r_\alpha \operatorname{tg} \varphi}}. \tag{6a}$$

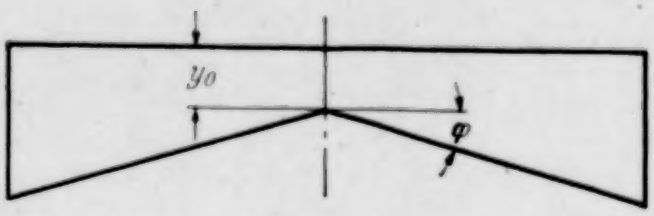

Abb. 3. Der kegelige Boden.

Abb. 4. Der paraboloide Boden.

c) Wenn beim paraboloiden Boden (Abb. 4) der Querschnitt durch die Parabel $y = y_0 + m r^2$ begrenzt wird, dann ergibt sich aus (4)

$$\vartheta(r) = \vartheta_{II} + \frac{q}{4\,m\,\lambda} \ln \frac{y_0 + m\, r_2^2}{y_0 + m\, r^2}, \tag{7}$$

$$q = \frac{(\vartheta(r_\alpha) - \vartheta(r_\beta))\, 4\, m\, \lambda}{\ln \dfrac{y_0 + m\, r_\beta^2}{y_0 + m\, r_\alpha^2}}. \tag{7a}$$

Ist die Innenfläche Teil einer Kugelfläche vom Halbmesser R, dann ist angenähert $m \approx 1/2\, R$.

8. Wärmefluß vom Boden an die Gehäuseluft. Bei der folgenden Rechnung wird der Wärmewiderstand des Kolbenbodens in axialer Richtung gegen den Wärmewiderstand des Übergangs vom Kolbenboden zur Gehäuseluft vernachlässigt. Daß dies unter den praktisch vorliegenden Verhältnissen kaum einen Fenler darstellt, zeigt folgende Überlegung: Nach Abschnitt **5** ist α_{Bg} höchstens 180 Kcal/m²hgrad. Mit $\lambda = 126$ Kcal/mhgrad hätte dann erst ein Boden von 0,70 m Stärke denselben Wärmewiderstand wie der Übergang zur Gehäuseluft.

Die bei Berücksichtigung des Wärmeabflusses vom Boden an die Gehäuseluft entstehenden Temperaturen werden durch ein Iterationsverfahren berechnet. Als erste Näherungen für die Bodentemperaturen werden die in Abschnitt **7** berechneten angenommen. Mit diesen wird die Ableitung berechnet und aus dem noch verbleibenden Wärmestrom die Temperaturen bestimmt. Dieser einmalige Iterationsschnitt ist bei dem vorliegenden Problem vollkommen ausreichend. Ist $\vartheta_0(r)$ die gemäß Abschnitt **8** berechnete ursprüngliche Bodentemperatur und Θ_g die Gehäuselufttemperatur, dann ist der beim Halbmesser r noch verbleibende Wärmestrom

$$Q(r) = q \pi r^2 - \int_0^r (\vartheta_0(r) - \Theta_g)\, \alpha_{Bg}\, 2 \pi r\, dr.$$

Mit

$$Q(r) = -\lambda\, 2 \pi r\, y(r) \frac{d\vartheta}{dr}$$

wird

$$\vartheta(r) = \int_0^r \frac{\alpha_{Bg}}{r\,\lambda\, y(r)} \int_0^r (\vartheta_0(r) - \Theta_g)\, r\, dr\, dr - \int_0^r \frac{q\, r}{2\,\lambda\, y(r)}\, dr. \tag{8}$$

Daraus ergibt sich z. B. für den ebenen Boden zufolge Gleichung (5) mit $y = y_0$ nach Umformung

$$\vartheta(r) = \vartheta_{II} + \frac{q}{4\lambda y_0}(r_2^2 - r^2) - \frac{\alpha_{Bg}}{4\lambda y_0}\left[(r_2^2 - r^2)(\vartheta_{II} - \Theta_g) + \frac{q(3r_2^4 - 4r_2^2 r^2 + r^4)}{16\lambda y}\right]. \tag{9}$$

Entsprechend wird beim kegeligen Boden für den Sonderfall $y = r \operatorname{tg}\varphi$

$$\vartheta(r) = \vartheta_{II} + \frac{q}{2\lambda}\operatorname{ctg}\varphi\,(r_2 - r) - \frac{\alpha_{Bg}}{2\lambda}\left[(r_2 - r)\operatorname{ctg}\varphi\,(\vartheta_{II} - \Theta_g) + \operatorname{ctg}^2\varphi\,\frac{q\,2r_2^3 - 3r_2 r + r^2)}{6\lambda}\right]. \tag{10}$$

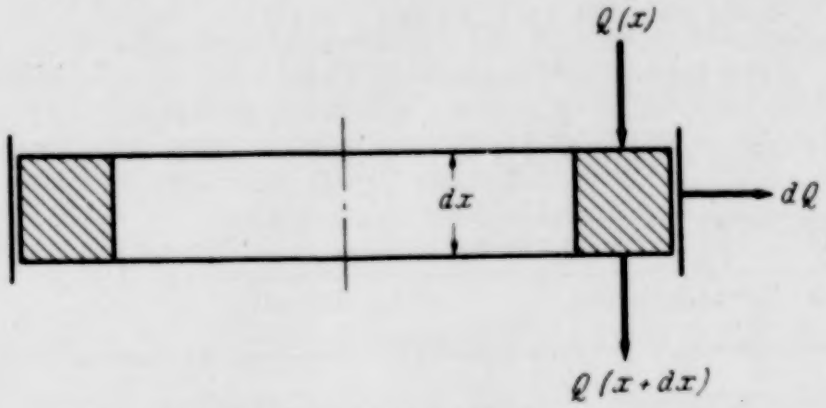

Abb. 5. Wärmeabfluß aus dem Schaft in die Zylinderwand.

9. Der einfache Schaft. Der Schaft habe die konstante Schaftstärke p, die Wärmeleitzahl λ und die Wärmeübergangszahl α zum Zylinder mit der effektiven Zylindertemperatur Θ_z. Gemäß Abb. 5 gilt

$$Q(x) = Q(x + dx) + dQ.$$

Dabei ist

$$dQ = 2\pi r\,dx(\vartheta - \Theta_z)\alpha.$$

Daraus erhält man mit

$$Q(x) = -2\pi r p \lambda \frac{d\vartheta}{dx}$$

und

$$Q(x + dx) = -2\pi r p \lambda\left(\frac{d\vartheta}{dx} + dx\frac{d^2\vartheta}{dx^2}\right)$$

die Differentialgleichung der Schafttemperatur:

$$\alpha(\vartheta - \Theta_2) = p\lambda\frac{d^2\vartheta}{dx^2}. \tag{11}$$

Wenn Θ_z konstant ist und $(\vartheta - \Theta_z) = v$ gesetzt wird, erhält man die Gleichung

$$\frac{\alpha}{p\lambda}v = \frac{d^2 v}{dx^2}, \tag{11a}$$

deren Lösung mit

$$c = \sqrt{\frac{\alpha}{p\lambda}} \tag{12}$$

die Form hat

$$v = K_1 e^{-cx} + K_2 e^{+cx}. \tag{13}$$

Dabei sind K_1 und K_2 die Integrationskonstanten, zu deren Bestimmung folgende Bedingungen dienen:

Am Endpunkt des Schaftes, bei $x = l_1$ muß $d\vartheta/dx = 0$ sein. Daraus folgt

$$K_2 = K_1 e^{-2cl_1}.$$

Am Schaftanfang bei $x = 0$ soll v den gegebenen Wert v_0 annehmen; somit ist

$$K_1 = \frac{v_0}{1 + e^{-2cl_1}}, \qquad K_2 = \frac{v_0}{1 + e^{+2cl_1}}.$$

Setzt man diese Werte in (13) ein, so ergibt sich der in den Schaftanfang hineingeflossene Wärmestrom zu

$$Q(0) = -2\pi r p \lambda\left(\frac{d\vartheta}{dx}\right)_{x=0} = -2\pi r p \lambda c v_0\left[-\frac{1}{1 + e^{-2cl_1}} + \frac{1}{1 + e^{+2cl_1}}\right].$$

Wenn man $v_0/Q(0)$ als Wärmewiderstand R bezeichnet, dann ergibt sich für diesen der Ausdruck

$$R = \frac{\operatorname{Ctg}(cl_1)}{2\pi r\sqrt{\alpha p \lambda}}. \tag{14}$$

10. Der zweiteilige Schaft. Im Hinblick auf die wirklichen Verhältnisse setze sich der Schaft nunmehr aus zwei Stücken (Ringzone und eigentlichem Kolbenschaft) zusammen (Abb. 6), die durch die Größen p_1, p_2, α_1, α_2, c_1, c_2, l_1, l_2 charakterisiert seien. Entsprechend (13) gilt in den beiden Stücken

$$v_I = K_{11}\, e^{-c_1 x} + K_{21}\, e^{+c_1 x}, \tag{15}$$

$$v_{II} = K_{12}\, e^{-c_2 x} + K_{22}\, e^{+c_2 x}. \tag{16}$$

Zur Bestimmung der vier Integrationskonstanten K_{11}, K_{12}, K_{21} und K_{22} dienen folgende Bedingungen:

a) $v_I(0) = v_0$ sei gegeben:

$$v_0 = K_{11} + K_{21};$$

b) für $x = l_1$ muß $v_I = v_{II}$ sein (Stetigkeit der Temperatur):

$$K_{11} e^{-c_1 l_1} + K_{21} e^{+c_1 l_1} = K_{12} e^{-c_2 l_1} + K_{22} e^{+c_2 l_1};$$

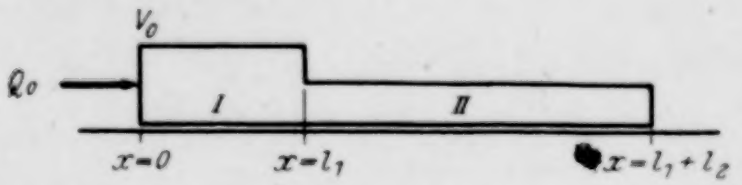

Abb. 6. Der zweiteilige Schaft.

c) für $x = l_1$ muß der aus v_I und der aus v_{II} berechnete Wärmestrom gleich sein (Stetigkeit des Wärmestromes):

$$p_1 c_1 (-K_{11} e^{-c_1 l_1} + K_{21} e^{c_1 l_1}) = p_2 c_2 (-K_{12} e^{-c_2 l_1} + K_{22} e^{c_2 l_1});$$

d) für $x = (l_1 + l_2)$ muß der Wärmestrom zu Null werden:

$$\left(\frac{d v_{II}}{d x}\right)_{x=(l_1+l_2)} = p_2 c_2 \left(-K_{12} e^{-c_2 (l_1+l_2)} + K_{22} e^{c_2 (l_1+l_2)}\right) = 0.$$

Nach einiger Eliminationsarbeit erhält man

$$K_{11} = \frac{v_0}{2} + \frac{Q_0}{4 \pi r \sqrt{p_1 \lambda \alpha_1}}, \tag{17}$$

$$K_{21} = \frac{v_0}{2} - \frac{Q_0}{4 \pi r \sqrt{p_1 \lambda \alpha_1}}, \tag{18}$$

$$K_{12} = -\frac{p_1 c_1 v_0 \operatorname{Sin}(c_1 l_1) - \frac{Q_0}{2 \pi r \lambda} \operatorname{Cof}(c_1 l_1)}{2 p_2 c_2 \operatorname{Sin}(c_2 l_2)}\, e^{+c_2 (l_1+l_2)}, \tag{19}$$

$$K_{22} = -\frac{p_1 c_1 v_0 \operatorname{Sin}(c_1 l_1) - \frac{Q_0}{2 \pi r \lambda} \operatorname{Cof}(c_1 l_1)}{2 p_2 c_2 \operatorname{Sin}(c_2 l_2)}\, e^{-c_2 (l_1+l_2)}. \tag{20}$$

Dabei wurde der einfließende Wärmestrom $Q_0 = -2 \pi r p_1 \lambda \left(\frac{d v_I}{d x}\right)_{x=0}$ zur Abkürzung eingesetzt. Mit diesen Ausdrücken erhält man für den Wärmewiderstand des zweiteiligen Schaftes [entsprechend (14)]

$$R = \frac{\operatorname{Tg}(c_1 l_1) + \sqrt{\frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_2 p_2}}\, \frac{1}{\operatorname{Tg}(c_2 l_2)}}{2 \pi r \sqrt{\alpha_1 p_1 \lambda}\left[1 + \sqrt{\frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_2 p_2}}\, \frac{\operatorname{Tg}(c_1 l_1)}{\operatorname{Tg}(c_1 l_1)}\right]}. \tag{21}$$

Als Rechenprobe kann die Tatsache dienen, daß dieser Ausdruck sowohl für $l_1 = 0$ als auch für $l_2 = 0$ in (14) übergeht.

11. Veränderliche „effektive" Zylindertemperaturen. Während bisher angenommen wurde, daß sich die Zylinderwandung auf einer konstanten Temperatur befände, wird nunmehr der Einfluß einer von Ort zu Ort verschiedenen „effektiven" Zylindertemperatur in Rechnung gesetzt (Abb. 7). Diese sei $\Theta_z(x)$. Wenn in den Schaft bei $x = 0$ kein Wärmestrom einfließen

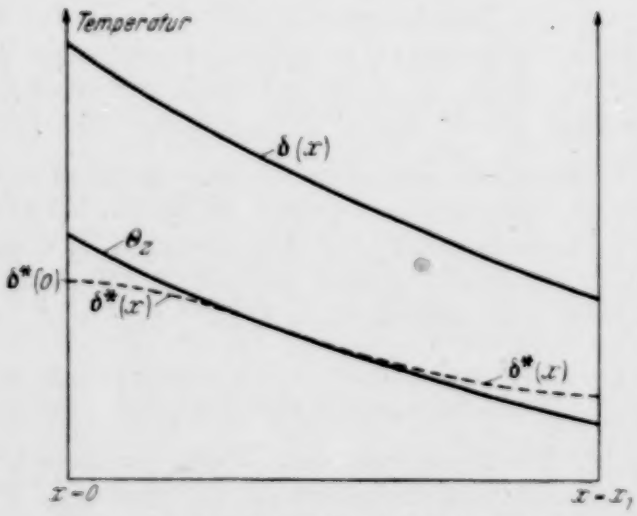

Abb. 7. Veränderliche „effektive" Zylindertemperatur.

würde, dann würde sich in ihm ein Temperaturfeld $\vartheta^*(x)$ einstellen, das – entsprechend (11) – der Differentialgleichung

$$c^2\left(\vartheta^*(x)-\Theta_s(x)\right)=\frac{d^2\,\vartheta^*(x)}{d\,x^2} \tag{22}$$

gehorcht. Die dazu gehörigen Randbedingungen sind

$$\left(\frac{d\,\vartheta^*}{d\,x}\right)_{x=0}=0 \quad \text{. und} \quad \left(\frac{d\,\vartheta^*}{d\,x}\right)_{x=x_1}=0\,. \tag{22a}$$

Da andererseits – siehe (11) – gilt

$$c^2\left(\vartheta(x)-\Theta_s(x)\right)=\frac{d^2\,\vartheta(x)}{d\,x^2}\,,$$

so folgt daraus, daß auch

$$c^2\left(\vartheta(x)-\vartheta^*(x)\right)=\frac{d^2}{d\,x^2}\left(\vartheta(x)-\vartheta^*(x)\right) \tag{23}$$

mit den Randbedingungen

$$Q_0=-2\pi r p\lambda\left[\frac{d}{d\,x}\left(\vartheta(x)-\vartheta^*(x)\right)\right]_{x=0} \tag{23a}$$

und

$$0=\left[\frac{d}{d\,x}\left(\vartheta(x)-\vartheta^*(x)\right)\right]_{x=x_1} \tag{23b}$$

gelten muß, so daß insgesamt für die neue Funktion $(\vartheta-\vartheta^*)$ bei veränderlicher effektiver Zylindertemperatur genau dieselben Gesetzmäßigkeiten gelten wie bisher für die Funktion $v=(\vartheta-\Theta_s)$ bei konstantem Θ_s.

Im besonderen wird [siehe Gleichung (14) und vorhergehendes]

$$R=\frac{\vartheta(0)-\vartheta^*(0)}{Q_0}=\frac{\mathfrak{Ctg}(c\,l_1)}{2\pi r\sqrt{\alpha p\lambda}}\,.$$

Daraus folgt

$$\vartheta(0)=\vartheta^*(0)+Q_0\,\frac{\mathfrak{Ctg}(c_1 l_1)}{2\pi r\sqrt{\alpha p\lambda}}\,. \tag{24}$$

Entsprechend wird für die zweiteilige Schaftzone [entsprechend (21)]

$$\vartheta(0)=\vartheta^*(0)+Q_0\,\frac{\mathfrak{Tg}(c_1 l_1)+\sqrt{\frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_2 p_2}}\,\frac{1}{\mathfrak{Tg}(c_2 l_2)}}{2\pi r\sqrt{\alpha_1 p_1\lambda}\left[1+\sqrt{\frac{\alpha_1 p_1}{\alpha_2 p_2}}\,\frac{\mathfrak{Tg}(c_1 l_1)}{\mathfrak{Tg}(c_2 l_2)}\right]}\,. \tag{25}$$

Man kann daher so rechnen, als ob der Zylinder eine konstante „effektive" Temperatur hätte, wenn man als Eingangstemperatur nimmt die Differenz zwischen der am Schaftanfang tatsächlich bestehenden $[\vartheta(0)]$ und der Temperatur, die der Schaftanfang hätte, wenn kein Wärmestrom in ihn hineinflösse $[\vartheta^*(0)]$.

Diese „Nulltemperatur" $\vartheta^*(0)$ kann für Kolbenverhältnisse leicht abgeschätzt werden: Bei sehr dünnwandigen Schäften ist sie etwa gleich der effektiven Zylindertemperatur für den Schaftanfang, bei extrem dicken Schäften (ebenso bei sehr kleiner Wärmeübergangszahl) ist sie etwa gleich dem Mittelwert der effektiven Zylindertemperaturen über den ganzen Schaft.

Solange eingehendere Untersuchungen ausstehen, wird – im Hinblick auf die geringen Genauigkeitsansprüche, welche an Kolbenberechnungen gestellt werden – empfohlen, die effektive Zylindertemperatur für den obersten Kolbenring als $\vartheta^*(0)$ einzusetzen. In einfachen Fällen kann jedoch $\vartheta^*(0)$ auch gemäß (22) und (22a) berechnet werden. Wenn z. B. im Zylinder ein lineares Temperaturgefälle $\Theta_s(x)=\Theta_0-x\,\Theta'$ herrscht, dann erhält man nach einiger Umrechnung

$$\vartheta^*(0)=\Theta_0+\frac{\Theta'}{c}\,\frac{1-\mathfrak{Cof}(c\,x_1)}{\mathfrak{Sin}(c\,x_1)}\,. \tag{26}$$

12. Das Rechenschema. Wenn zur Berechnung der Kolbentemperaturen die in der Einleitung genannten Einflußgrößen (q, α_m, α_{SW}, α_{Bg}, $\vartheta^*(0)$ und Θ_g) bekannt sind, wird nach folgendem Schema (Iterationsverfahren mit einem Korrekturschritt) vorgegangen.

Berechne:

a) den ursprünglich einfallenden Wärmestrom $Q_{00} = q \pi r_2^2$;

b) den Wärmewiderstand R des aus zwei Stücken zusammengesetzten Schaftes gemäß Gleichung (21);

c) die Temperatur ϑ_{II} am Übergang vom Schaft zum Boden $\vartheta_{II} = \vartheta^*(0) + Q_{00} R$;

d) die Temperatur ϑ_I in Bodenmitte ($r = 0$) aus
Gleichung (5) beim ebenen Boden,
Gleichung (6) beim kegeligen Boden,
Gleichung (7) beim paraboloiden Boden;

e) die mittlere Bodentemperatur $\vartheta_{Bm} = \frac{1}{2}(\vartheta_I + \vartheta_{II})$;

f) den Wärmestrom unter Berücksichtigung der Wärmeableitung durch die Gehäuseluft $Q_0 = Q_{00} - \alpha_{Bg} \pi r_1^2 (\vartheta_{Bm} - \Theta_g)$.

Die so berechneten Werte sind Zwischenergebnisse für die endgültige Berechnung. Berechne:

A) $\vartheta_{II} = \vartheta^*(0) + Q_0 R$ [Q_0 aus f) und R aus b)];

B) die Temperaturen am Kolbenboden gemäß (5), (6) oder (7); bei höheren Genauigkeitsansprüchen gemäß (9) oder (10).

13. Die Vernachlässigungen. Um bei dem schwierigen Problem der Kolbentemperaturen überhaupt zu auswertbaren Formeln zu kommen, mußten mancherlei Vernachlässigungen in Kauf genommen werden:

a) Die Annahme eines rotationssymmetrischen Kolbens gestattet nicht, die Wärmeableitung durch den Kolbenbolzen in Rechnung zu setzen.

b) Die Vernachlässigung der Wärmeableitung vom Kolbenschaft zur Gehäuseluft.

c) Eine wesentliche Vernachlässigung der Rechnung besteht darin, daß sowohl im Boden als auch in der Ringzone und im Schaft die Temperatur nur in Abhängigkeit von der räumlichen Hauptausdehnung betrachtet wird. Im Boden erscheint also kein Temperaturgefälle in axialer Richtung, in der Ringzone und im Schaft keines in radialer Richtung. Damit ist eine Grenze für die Anwendung der Rechnung gegeben: Kolben mit sehr dicken Böden, Übergangsquerschnitten und Schäften werden dem Rechnungsschema schwer anzupassen sein.

d) Der Einfluß der Reibungswärme wird vernachlässigt.

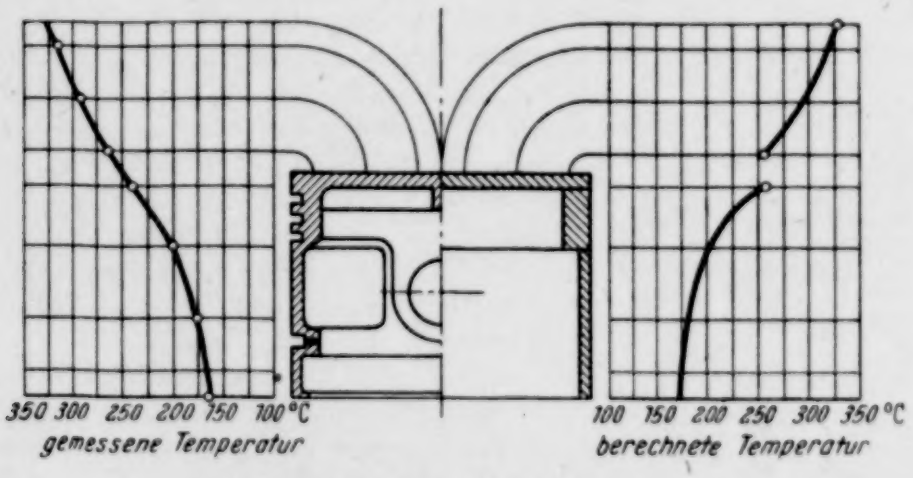

Abb. 8. Vergleich der Rechnung mit der Messung.

14. Ein zahlenmäßiges Beispiel. Die Unterlagen für das folgende Beispiel wurden der Arbeit von *Brecht* entnommen, der mit Schmelzstiften die Temperaturen an Kolben von laufenden Motoren gemessen hatte. Dieses Verfahren soll auf $\pm 5°$ C genau arbeiten. Die Ergebnisse seiner Messung sind auf der linken Hälfte der Abb. 8 dargestellt. (Es handelt sich um die Messung auf der Druckseite des Kolbens auf Seite 39 seiner Arbeit, dasselbe Beispiel wie in Tafel 1). Die Kolbendaten sind

$$r_1 = 48 \text{ mm}, \quad r_2 = 60 \text{ mm}, \quad p_1 = 12 \text{ mm}, \quad p_2 = 4{,}5 \text{ mm},$$
$$y_0 = 6 \text{ mm}, \quad l_1 = 30 \text{ mm}, \quad l_2 = 60 \text{ mm}, \quad \lambda = 126 \text{ Kcal/mh grad}.$$

Für die folgenden Größen mußten plausible Annahmen gemacht werden:

$$\alpha_m = 2900 \text{ Kcal m}^2\text{h grad}, \qquad \Theta g = 80^\circ \text{ C},$$
$$\alpha_{SW} = 1800 \text{ Kcal m}^2\text{h grad}, \qquad \vartheta^*(0) = 225^\circ \text{ C},$$
$$\alpha_{Bg} = 180 \text{ Kcal m}^2\text{h grad}.$$

Damit berechnet sich $c_1 = 43 \text{ m}^{-1}$, $c_2 = 57 \text{ m}^{-1}$. Mit dem Rechenschema ergibt sich:

a) $Q_{30} = 900$ Kcal/h, c) $(\vartheta_{II}) = 263^\circ$ C, e) $\vartheta_{Bm} = 308^\circ$ C,
b) $R = 0{,}0425$ grad h/Kcal, d) $(\vartheta_I) = 353^\circ$ C, f) $Q_0 = 640$ Kcal/h,

A) $\vartheta_{II} = 253^\circ$ C, B) $\vartheta_I = 332^\circ$ C.

Diese Werte wurden zusammen mit den gemäß Abschnitt 8 und 10 bezeichneten Zwischenwerten in die rechte Hälfte der Abb. 8 eingetragen.

Die sehr gute Übereinstimmung sagt natürlich wenig über den Wert der Rechnung. Solange noch so viele Einflußgrößen wie hier praktisch unbekannt sind, kann man durch ihre zweckmäßige Wahl immer eine Übereinstimmung mit der Messung erzielen.

15. Zusammenfassung. Zur Berechnung der Kolbentemperaturen von Wärmekraftmaschinen wurde ein Rechenschema abgeleitet. Dieses geht von der Voraussetzung aus, daß die vom Kolbenboden aufgenommene Wärme auf drei Wegen abfließt: über die Ringzone zum Zylinder, über die Schaftzone zum Zylinder und durch den Kolbenboden zur Gehäuseluft. Die Rechnung wird in einem Beispiel durchgeführt.

(Eingegangen am 2. November 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Karl Steinbuch*, (14a) Waiblingen/Rems, Haydnweg 3.

Kritische Drehzahlen anisotrop gelagerter Läufer.

Von **R. Grammel.**

1. Problemstellung und Ergebnisse[1]. Die tatsächlichen kritischen Drehzahlen von Läufern, die durch einen Motor unmittelbar angetrieben werden (Schleifscheiben, Ventilatoren, Luftschrauben usw.), stimmen häufig sehr schlecht mit den in üblicher Weise berechneten überein. Dies kann nur daran liegen, daß die Voraussetzungen der Rechnung nicht erfüllt sind, vor allem die Annahme, daß die Läuferwelle fest in einem selber nicht nachgiebigen Lager liege, oder anders ausgedrückt, daß an der kritischen Drehzahl nur die Elastizität der Welle und die Läufermasse beteiligt sei. Schon bei nachgiebiger Lagerung in einem sonst aber starren Lager tritt eine Verschiebung der kritischen Drehzahl (im allgemeinen zu einem kleineren Wert hin) ein und unter Umständen zudem sogar eine Aufspaltung in zwei kritische Drehzahlen[2].

Handelt es sich um einen Motor, der seinerseits federnd gelagert oder aufgehängt ist, so steht zu erwarten, daß die beobachteten kritischen Drehzahlen ebenfalls merklich und in doppelter Weise von der „starr" berechneten abweichen: die in der Regel anisotrop nachgiebige Lagerung oder Aufhängung des Motors zerspaltet die ursprüngliche kritische Drehzahl der Welle in zwei (im Mittel verschobene) kritische Drehzahlen, und die hinzutretende endliche Masse des Motors läßt eine weitere Aufspaltung vermuten. In der Tat ergibt sich ganz einfach (Ziff. 2), daß die kritische Drehzahl eines einfachen Läufers sich infolge der Masse und der Lager- oder Aufhängefederung des Motors im allgemeinen in vier kritische Drehzahlen aufspaltet.

In manchen Fällen muß man sich das Lager (im weitesten Sinne) als frei beweglich, aber mit einer endlichen und anisotropen Masse ausgestattet denken, d. h. mit einer Masse von richtungsabhängiger Trägheit (z. B. ein Flugzeug im Hinblick auf die Masse der umgebenden Luft und seinen richtungsabhängigen Luftwiderstand). Wir werden finden (Ziff. 3), daß sich dann die kritische Drehzahl entweder in zwei kritische aufspaltet, oder daß alle Drehzahlen „unruhig", aber nicht eigentlich kritisch sind.

2. Federnd gelagerter Motor. Ein Läufer von der Masse m, den wir uns der Einfachheit halber aus einer masselosen, fliegenden (d. h. nur am einen Ende eingespannt gelagerten) Welle und einer einzigen trägen Masse (Scheibe) bestehend vorstellen wollen, liege in einem Lager, das zusammen mit dem Motor die Masse m^* habe. Der Motor sei federnd aufgehängt oder gelagert.

In einem raumfesten kartesischen (x, y, z)-System, dessen x-Achse mit der Achse der ruhenden Welle zusammenfällt, sei, projiziert auf die (y, z)-Ebene (Abb. 1), O die Ruhelage des Lagermittelpunktes, O^* (y^*, z^*) seine ausgelenkte Lage, in welcher er durch eine Federkraft $-\mathfrak{R}^*(Y^*, Z^*)$ gegen O zurückgezogen werde; ferner $W(\bar{y}, \bar{z})$ der Durchstoßungspunkt der gebogenen Wellenachse durch die Scheibe (im Ruhezustand ist also $W \equiv O^* \equiv O$); weiter $-\mathfrak{R}(Y, Z)$ die Kraft, mit der infolge der Elastizität der Welle der Punkt W in seine Ruhelage O^* zurückgezogen wird; endlich $S(y, z)$ der Schwerpunkt der Scheibe mit der (in der Regel nur der Größenordnung nach bekannten) Exzentrizität e. Vom Drehwinkel φ darf man im Rahmen einer für das Folgende ausreichenden Theorie erster Ordnung voraussetzen[3], daß er zu unveränderlicher Drehgeschwindigkeit ω gehöre, daß also $\varphi = \omega t$ sei.

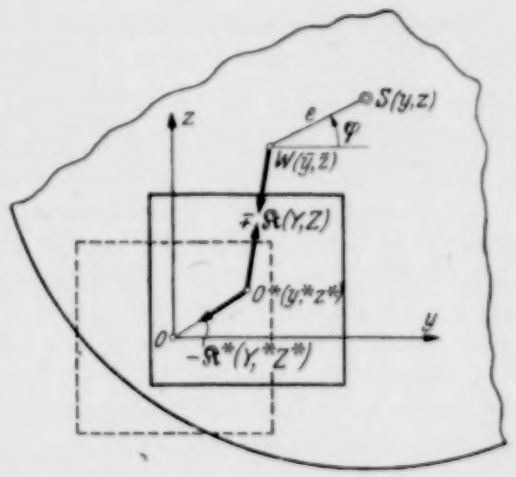

Abb. 1. Projektion des Lagermittelpunkts O^*, des Durchstoßungspunkts W der Wellenachse durch die Scheibe und des Schwerpunkts S der Scheibe auf die (y, z)-Ebene senkrecht zur Wellenachse.

Mit den Federungszahlen α' und α'' in den beiden Richtungen y und z und mit der *Maxwell*schen Einflußzahl α der Wellenbiegung hat man

---

[1] Auszug aus einem Aufsatz in einer (durch Kriegseinwirkung völlig vernichteten) Festschrift zum 70. Geburtstag von *Ludwig Prandtl* (4. 2. 1945).

[2] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 788, Berlin 1939.

[3] Vgl. Technische Dynamik, S. 776.

$$y^* = \alpha' Y^* , \qquad z^* = \alpha'' Z^* , \tag{1a}$$

$$\bar{y} - y^* = \alpha Y , \qquad \bar{z} - z^* = \alpha Z ; \tag{1b}$$

außerdem ist

$$y = \bar{y} + e \cos \omega t , \qquad z = \bar{z} + e \sin \omega t . \tag{2}$$

Die Bewegungsgleichungen der Scheibe (m) und des „Lagers" (m^*) lauten

$$m \ddot{y} = -Y , \qquad m \ddot{z} = -Z , \tag{3a}$$

$$m^* \ddot{y}^* = Y - Y^* , \qquad m^* \ddot{z}^* = Z - Z^* . \tag{3b}$$

Man entfernt $\bar{y}$, Y und Y^* aus den fünf ersten Gleichungen (1) bis (3) und erhält

$$\left.\begin{aligned} \alpha' m \ddot{y} + \alpha' m^* \ddot{y}^* + y^* = 0 , \\ \alpha m \ddot{y} + y - y^* = e \cos \omega t \end{aligned}\right| \tag{4}$$

und ein ebenso gebautes System mit z, α'', $\sin \omega t$ statt y, α', $\cos \omega t$.

Kritisch sind die Drehzahlen $\omega = \Omega$, für welche das System (4) ein partikuläres Integral

$$y = a \cos \Omega t , \qquad y^* = b \cos \Omega t$$

zuläßt, also die Nullstellen der Determinante

$$A(\Omega) = \begin{vmatrix} m \Omega^2 & m^* \Omega^2 - \dfrac{1}{\alpha'} \\ m \Omega^2 - \dfrac{1}{\alpha} & \dfrac{1}{\alpha} \end{vmatrix} \tag{5}$$

und ebenso die Nullstellen der mit α'' statt α' geschriebenen Determinante. Mit den Abkürzungen

$$\varkappa = \frac{m^*}{m} , \qquad \lambda' = \frac{\alpha}{\alpha'} , \qquad \lambda'' = \frac{\alpha}{\alpha''} \tag{6}$$

sowie der kritischen Drehzahl

$$\omega_k = \frac{1}{\sqrt{\alpha m}} , \tag{7}$$

die die starr gelagerte Welle hätte, erhält man für die relativen kritischen Zahlen

$$x_i = \left(\frac{\Omega_i}{\omega_k}\right)^2 \tag{8}$$

die Gleichung

$$\varkappa x^2 - (1 + \varkappa + \lambda) x + \lambda = 0 \qquad (\lambda = \lambda', \lambda'') , \tag{9}$$

also die vier Werte

$$\left.\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{2\varkappa} \left[1 + \varkappa + \lambda' \pm \sqrt{(1 + \varkappa + \lambda')^2 - 4 \varkappa \lambda'} \right] , \\ x_{3,4} &= \frac{1}{2\varkappa} \left[1 + \varkappa + \lambda'' \pm \sqrt{(1 + \varkappa + \lambda'')^2 - 4 \varkappa \lambda''} \right] . \end{aligned}\right| \tag{10}$$

Die Radikanden sind wegen

$$(1 + \varkappa + \lambda)^2 - 4 \varkappa \lambda = (1 + \varkappa - \lambda)^2 + 4 \lambda$$

stets positiv, alle x_i somit reell und positiv. Die vier Ω_i sind mithin reell; im allgemeinen sind sie außerdem alle verschieden. Man bestätigt zur Probe, daß mit $m^* \longrightarrow \infty$, also $\varkappa \longrightarrow \infty$ alle $x_i = 1$ werden, d. h., daß bei starrer Lagerung alle $\Omega_i = \omega_k$ bleiben.

Wiewohl mit (10) das Problem vollständig gelöst ist und die vier kritischen Drehzahlen Ω_i berechnet werden können, wollen wir noch ein Diagramm hinzufügen, das die x_i-Werte in ihrer Abhängigkeit von den drei Parametern $\varkappa$, λ', λ'' übersichtlich darstellt. Hierzu schreiben wir die Gleichung (9) in der Gestalt

$$(1 - x) \varkappa + \frac{x - 1}{x} \lambda + 1 = 0 , \tag{11}$$

deuten $\varkappa$ und λ als *Plückersche* Linienkoordinaten[1] und zeichnen in einem kartesischen (ξ, η)-System die Kurve

$$\xi = 1 - x , \qquad \eta = \frac{x - 1}{x} \tag{12}$$

mit dem Parameter x, den man dabei als Skala auf der Kurve aufträgt (Abb. 2). Die Kurve ist eine Hyperbel (von der nur der eine Zweig in Betracht kommt, der zu positiven Werten x gehört) und hat die Asymptoten $\xi = 1$ und $\eta = 1$. Die Gleichung (11) besagt nun in der Form

$$\varkappa \xi + \lambda \eta + 1 = 0 , \tag{13}$$

daß eine Gerade mit den Achsenabschnitten

$$\xi = -\frac{1}{\varkappa} , \qquad \eta = -\frac{1}{\lambda} \tag{14}$$

[1] Vgl. für solche Darstellungen: *R. Grammel*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 169.

durch den Punkt (ξ, η) geht, also die Kurve (12) im Skalenpunkt x trifft. Man hat daher nur noch die Achsenabschnitte (14) auf den beiden Achsen zu markieren und tut dies einfach dadurch, daß man die reziproken Werte m/m^* und α'/α bzw. α''/α von $\varkappa$ und λ' bzw. λ'' auf den negativen Achsen abträgt. Das Diagramm zeigt die Handhabung an dem Beispiel $m/m^* = 0{,}40$; $\alpha'/\alpha = 0{,}60$ und liefert auf der Kurve die Werte $x_1 = 1{,}67$ und $x_2 = 0{,}40$.

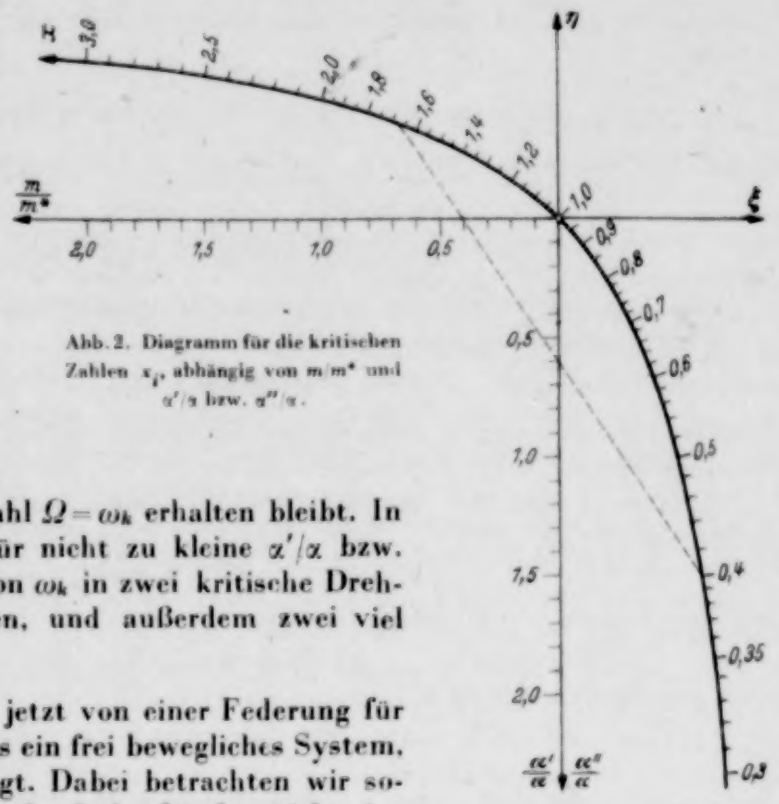

Abb. 2. Diagramm für die kritischen Zahlen x_i, abhängig von m/m^* und α'/α bzw. α''/α.

Man bestätigt noch einmal, daß für $m^* \longrightarrow \infty$, also $m/m^* = 0$ bei jedem Wert von α'/α bzw. α''/α die kritische Drehzahl $\Omega = \omega_k$ erhalten bleibt. In der Regel ist m/m^* eine kleine Zahl; für nicht zu kleine α'/α bzw. α''/α hat man dann eine Aufspaltung von ω_k in zwei kritische Drehzahlen Ω, die nicht weit über ω_k liegen, und außerdem zwei viel tiefere kritische Drehzahlen.

3. Anisotrope Lagerung. Wir sehen jetzt von einer Federung für das Lager samt Motor ab und denken uns ein frei bewegliches System, das die Scheibenwelle samt Scheibe trägt. Dabei betrachten wir sogleich den allgemeinen Fall, daß die Lagerkraft des Läufers nicht einfach gleich der Lagermasse mal der Lagerbeschleunigung, sondern eine beliebige lineare Vektorfunktion der Lagerbeschleunigung ist. In unserem raumfesten (x, y, z)-System sollen also zwischen den Komponenten Y, Z der Lagerkraft und den Komponenten $\ddot{y}^*, \ddot{z}^*$ der Beschleunigung des Lagermittelpunktes O^* (y^*, z^*) der fliegenden Welle die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} Y &= m_{11}\,\ddot{y}^* + m_{12}\,\ddot{z}^*\,, \\ Z &= m_{21}\,\ddot{y}^* + m_{22}\,\ddot{z}^* \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

gelten, wo die m_{ik} durch eine besondere Untersuchung zum voraus ermittelt gedacht seien.

Von den Massenzahlen m_{ik} darf man voraussetzen, daß

$$m_{11} > 0, \qquad m_{22} > 0, \qquad p^2 = m_{11}\,m_{22} - m_{12}\,m_{21} > 0 \tag{16}$$

ist. Die beiden ersten Ungleichungen besagen nämlich, daß zu einer positiven Beschleunigung $\ddot{y}^*$ in der y-Richtung allein $(\ddot{z}^* = 0)$ sicher auch eine positive Komponente Y der Lagerkraft in der y-Richtung erforderlich ist, ebenso zu $\ddot{z}^* > 0$ $(\ddot{y}^* = 0)$ eine positive Lagerkraft Z. Die dritte Ungleichung (16) bedeutet, daß man die Gleichungen (15) nach $\ddot{y}^*$ und $\ddot{z}^*$ auflösen darf, und daß dann auch umgekehrt einer positiven Lagerkraft Y allein $(Z = 0)$ eine positive Beschleunigung $\ddot{y}^*$ und einer positiven Lagerkraft Z allein $(Y = 0)$ eine positive Beschleunigung $\ddot{z}^*$ entspricht.

Wenn insbesondere $m_{12} = m_{21}$ ist, so kann man — gemäß dem sogenannten Hauptachsenproblem eines (symmetrischen) ebenen Tensors — durch eine Drehung des (x, y, z)-Systems um die x-Achse (nämlich um einen Winkel $\beta = \frac{1}{2}$ arctg $[2\,m_{12}/(m_{11} - m_{22})]$) erreichen, daß im neuen System m_{12} und m_{21} verschwinden. Im allgemeinen wird das aber nicht zutreffen, d. h., die Größen m_{ik} werden im allgemeinen die Komponenten eines unsymmetrischen Affinors sein, und als solche wollen wir sie im folgenden auch behandeln.

Mit den früheren Bezeichnungen gelten hier ebenfalls die Gleichungen (1b), (2) und (3a). Aus ihnen und (15) wollen wir $\ddot{y}^*, \ddot{z}^*, \bar{y}, \bar{z}, Y$ und Z eliminieren. Zunächst folgt aus (3a) und (15)

$$\begin{aligned} m\,\ddot{y} + m_{11}\,\ddot{y}^* + m_{12}\,\ddot{z}^* &= 0\,, \\ m\,\ddot{z} + m_{21}\,\ddot{y}^* + m_{22}\,\ddot{z}^* &= 0\,. \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen darf man integrieren zu

$$\left.\begin{aligned} m\,y + m_{11}\,y^* + m_{12}\,z^* &= 0\,, \\ m\,z + m_{21}\,y^* + m_{22}\,z^* &= 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

je eine dabei auf der rechten Seite eigentlich noch hinzuzufügende lineare Funktion der Zeit würde nur eine gleichförmige geradlinige Bewegung des ganzen Systems bedeuten, die hier

völlig belanglos ist, und kann daher weggelassen werden. Sodann folgt aus (1b), (2) und (3a)

$$\left.\begin{aligned} \alpha m \ddot{y} + y - y^* &= e \cos \omega t , \\ \alpha m \ddot{z} + z - z^* &= e \sin \omega t . \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Löst man schließlich (17) nach y^* und z^* auf und setzt dies in (18) ein, so kommt mit p^2 (16)

$$\left.\begin{aligned} \alpha m p^2 \ddot{y} + (m m_{22} + p^2) y - m m_{12} z &= e p^2 \cos \omega t , \\ \alpha m p^2 \ddot{z} + (m m_{11} + p^2) z - m m_{21} y &= e p^2 \sin \omega t . \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Kritische Zustände sind zu erwarten a) bei solchen Drehzahlen $\omega = \Omega$, für welche das System (19) ein partikuläres Integral

$$y = a \cos (\Omega t + \tau_1) , \qquad z = b \cos (\Omega t + \tau_2) \tag{20}$$

zuläßt; b) bei solchen Drehzahlen, für welche schon die verkürzten Gleichungen (19) selbst zeitlich anwachsende Lösungen besitzen, d. h. Integrale (20) mit nicht reellem Ω.

Geht man also mit (20) in (19) ein, so kommt mit den früheren Abkürzungen ω_k (7), x_i (8), p^2 (16) und mit

$$s = m_{11} + m_{22} \tag{21}$$

die quadratische Gleichung für die x_i

$$p^2 x^2 - (m s + 2 p^2) x + (m^2 + m s + p^2) = 0$$

mit den beiden Wurzeln

$$x_{1,2} = \frac{1}{2 p^2} (m s + 2 p^2 \pm m \sqrt{s^2 - 4 p^2}) . \tag{22}$$

[Diese Wurzeln sind — wie es ja auch sein muß — unabhängig von der Orientierung des (y, z)-Systems, da sie nur die Invarianten s und p^2 des Massenaffinors m_{ik} enthalten.]

Somit tritt der Fall a) ein für zwei reelle kritische Drehzahlen Ω_1 und Ω_2, falls der Radikand

$$R = s^2 - 4 p^2 = (m_{11} - m_{22})^2 + 4 m_{12} m_{21} \geqq 0 \tag{23}$$

ist; denn dann bleiben x_1 und x_2 nicht nur reell, sondern wegen

$$(m s + 2 p^2)^2 - m^2 R = 4 p^2 (m^2 + m s + p^2) > 0$$

sogar positiv, also auch Ω_1 und Ω_2 selbst reell.

Diese beiden Drehzahlen sind im allgemeinen verschieden; sie fallen nur dann zusammen, wenn $R = 0$ ist, was z. B. für $m_{11} = m_{22}$ und $m_{12} = 0$ oder $m_{21} = 0$ zutrifft, für $m_{11} \neq m_{22}$ aber nur dann möglich ist, wenn eine der beiden Größen m_{12} oder m_{21} hinreichend stark negativ wird.

Man kann die Formeln (22) auch in der Form

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= \psi_1 \omega_k \\ \Omega_2 &= \psi_2 \omega_k \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad \psi_{1,2}^2 = 1 + \frac{m (s \pm \sqrt{s^2 - 4 p^2})}{2 p^2} \tag{24}$$

schreiben. Aus ihr geht hervor, daß, wenn die Scheibenmasse m gegen die Lagermassen m_{11} oder m_{22} vernachlässigbar klein ist, $\psi_{1,2} = 1$ und also $\Omega_1 = \Omega_2 = \omega_k$ wird, daß aber in jedem anderen Falle die kritische Drehzahl (außer ihrer Aufspaltung) infolge der Lagermassen erhöht wird. Ist insbesondere $m_{12} = m_{21} = 0$, so kommt einfach

$$\psi_1 = \sqrt{1 + \frac{m}{m_{22}}} , \qquad \psi_2 = \sqrt{1 + \frac{m}{m_{11}}} . \tag{25}$$

Der Fall b) tritt ein, wenn der Radikand R negativ ausfällt, was nach (23) nur möglich wird, falls einer der beiden Werte m_{12} oder m_{21} hinreichend stark negativ ist. Jetzt gibt es überhaupt keine reellen kritischen Drehzahlen im gewöhnlichen Sinne; vielmehr läuft dann der Läufer bei allen Drehzahlen unruhig. Doch muß dieser Zustand nicht unbedingt gefährlich sein, da das Anwachsen der Ausschläge der Scheibe durch die abdämpfende Wirkung der von uns nicht berücksichtigten Reibung (z. B. der Scheibe an der Luft) möglicherweise verhindert wird. Wir lassen es daher offen, ob der Fall $R < 0$ überhaupt praktisch vorkommt.

(Eingegangen am 16. November 1948.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. Dr. *Richard Grammel*, (14a) Stuttgart N, Robert-Bosch-Str. 101.

Nabentotwasser hinter Leiträdern von axialen Strömungsmaschinen.

Von **K. Bammert** und **H. Kläukens.**

1. Einleitung. Bei der Untersuchung von Drallströmungen hinter Leiträdern von Axialturbinen und Axialverdichtern wurde beobachtet, daß die eigentliche Drallströmung nur den äußeren Teil des zur Verfügung stehenden Ringquerschnittes einnimmt, während sich im Innern ein Gebiet befindet, in dem die Flüssigkeit[1] zwar umgewälzt wird, aber an der eigentlichen fortschreitenden Bewegung kaum teilnimmt[2]. Mit der Ausbildung solcher sogenannter Totwasser hinter dem Leitrad ändern sich die Richtungen der Drallströmung. Diese Vorgänge spielen bei axial beaufschlagten Strömungsmaschinen eine ausschlaggebende Rolle. Daher erscheint es notwendig, die gemachten Erfahrungen theoretisch zu erfassen.

Bei der Berechnung der Drallströmungen geht man gewöhnlich von der Strömung reibungsfreier Flüssigkeit aus. Dabei ging man bislang so vor, daß man einer drallfreien Strömung einfach eine Drehbewegung überlagerte. Tatsächlich erhält man auf diese Weise eine Strömung, die den *Euler*schen Grundgleichungen formal gerecht wird. Nun ist aber die den ganzen Querschnitt ausfüllende (anliegende) Strömung nur ein Sonderfall. Auch in der reibungsfreien Flüssigkeit können Totwassergebiete auftreten. Sie müssen nur so beschaffen sein, daß in der Trennfläche überall der gleiche Druck herrscht. Solche Totwasser sind sogar immer dann zu erwarten, wenn in der anliegenden Strömung größere, ihr entgegengerichtete Druckanstiege überwunden werden müßten. Die bei wirklichen Flüssigkeiten vorkommenden Druckanstiege sind durch den Einfluß der Reibung zu erklären.

Im allgemeinen wird die das Leitrad verlassende Flüssigkeit durch eine äußere Begrenzung daran gehindert, geradlinig weiterzuströmen. Sie übt infolgedessen einen Druck auf die Außenwand aus. Der dadurch bedingte radiale Druckanstieg würde bei anliegender Strömung in der Nähe der Nabe Drücke erfordern, die unter Umständen wesentlich tiefer liegen als der Gegendruck. Das ist aber bei reibungsfreier Flüssigkeit nicht möglich; daher ist mit der Ausbildung eines Totwassergebietes in der Nähe der Nabe zu rechnen. Die Bedingungen, unter denen es zu solchen Ablösungen kommt, und der Einfluß der Reibung auf diese Erscheinungen sind Gegenstand der vorliegenden Untersuchung.

2. Das Wesen der Drallströmung. Nach Abb. 1 verläßt eine Flüssigkeit mit dem Gesamtdruck p_0 das Leitrad unter dem Strömungswinkel α_1. Sie tritt mit der Geschwindigkeit c_1 in den anschließenden Ringraum ein, der durch die Nabe und die Gehäusewand begrenzt ist. Die aus dem Leitrad austretenden Flüssigkeitsteilchen würden beim Fehlen der äußeren Begrenzung nach außen abströmen. Das wird aber durch die Gehäusewand verhindert. Die Teilchen müssen sich auf Schraubenlinien bewegen, also stetig in Richtung der Achse beschleunigt werden. Das kann aber nur durch einen radial gerichteten Druckgradienten, also einen Druckanstieg zur Außenwand, erzwungen werden.

Abb. 1. Leitrad einer Axialstufe.

Im Außenraum (Abb. 1) herrscht der Druck p_a. Dieser hat vor Einsetzen der Strömung im ganzen Ringraum geherrscht. Die Strömung ist dadurch entstanden, daß den unter dem hohen Druck p_0 stehenden Flüssigkeitsteilchen Gelegenheit geboten wurde, das Leitrad zu durchströmen. Dabei können sie eine Geschwindigkeit erlangen, die dem Druckunterschied $(p_0 - p_a)$ entspricht. Zu einer über diesen Druckunterschied hinausgehenden Beschleunigung ist bei reibungsfreier Strö-

[1] Unter Flüssigkeiten sind im folgenden Flüssigkeiten und Gase (Dämpfe) mit niedrigen *Mach*schen Zahlen gemeint. Bei hohen *Mach*schen Zahlen gelten die Überlegungen qualitativ.

[2] *F. Busmann*, VDI-Forsch.-Heft 349 (1931); *E. Meldau*, Drallströmung im Drehhohlraum. Diss. Hannover 1935; *G. Korbacher*, Strömungs- und Druckverhältnisse hinter einem Turbinenleitrad mit geraden und verwundenen Schaufeln. Diss. Braunschweig 1943.

mung kein Grund vorhanden. Somit ist p_a der geringste in der Strömung auftretende statische Druck.

Zur Berechnung der Strömung stehen zunächst sämtliche mit den *Euler*schen Grundgleichungen verträglichen Strömungsformen zur Verfügung. Das sind einmal die anliegende Strömung, ferner sämtliche Strömungen mit Trennflächen, auf denen der Druck konstant ist. Um zu sehen, welche Strömungsform bei der Durchströmung von Axialgittern zu erwarten ist, müssen die in Frage kommenden Formen näher betrachtet werden. Dabei wollen wir uns auf Drallströmungen beschränken, deren Radialkomponente vernachlässigbar klein ist. Die Drallströmung wird durch den Gehäusehalbmesser R (Abb. 2) begrenzt. Da mit Totwasser nur an Stellen tieferen Druckes zu rechnen ist, liegt die Strömung außen an. In der Nähe der Nabe dagegen – oder, falls diese fehlt, in Achsennähe – kann sich ein Totwasserkern ausbilden. Die Grenzfläche zwischen diesem und der eigentlichen Drallströmung muß aus Symmetriegründen kreiszylindrisch sein; ihr Halbmesser sei R_i. Dann durchströmt die Flüssigkeit den Ringraum $R_i < r < R$.

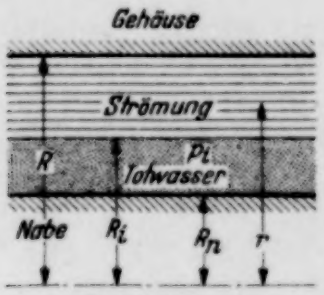

Abb. 2. Strömung mit Totwasserkern.

Ist bei vorgegebenem Durchsatz G (Durchflußgewicht je Zeiteinheit) der Strömungsquerschnitt sehr klein ($R_i/R \approx 1$), so muß die Axialgeschwindigkeit entsprechend hoch sein und damit auch die resultierende Geschwindigkeit. Da der Gesamtdruck p_0 festliegt, ist der mittlere statische Druck der Strömung niedrig und insbesondere auch der Druck p_i auf der Trennfläche. Das Verhältnis Druckgefälle zu Durchsatz $(p_0 - p_i)/G$, oder in dimensionsloser Schreibweise $(p_0 - p_i)/\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2$, wenn γ die Wichte der strömenden Flüssigkeit und g die Erdbeschleunigung sind, wird also für den Fall $R_i/R \approx 1$ große Werte annehmen; das heißt aber, daß bei vorgegebenem Gegendruck p_a nur eine geringe Menge durchtreten kann, da, wie gezeigt wurde, p_i nicht unter p_a herabsinken darf. Mit $R_i/R \approx 0$ kann zwar die Axialgeschwindigkeit klein sein, dagegen ist aber, beispielsweise bei Potentialströmung, die Umfangsgeschwindigkeit in der Nähe der Achse sehr groß. Das bedeutet wieder eine große Gesamtgeschwindigkeit und einen im Verhältnis zum Druckgefälle geringen Durchsatz. In diesen beiden extremen Fällen ist also der Durchsatz klein bzw. das relative Druckgefälle $(p_0 - p_i)/\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2$ groß. Es muß also ein dazwischenliegendes R_i/R geben, bei dem der Durchsatz bei vorgegebenem Druckunterschied einen Höchstwert, d. h. das relative Druckgefälle einen Kleinstwert erreicht. Trägt man dieses Druckgefälle über dem Halbmesserverhältnis R_i/R auf, dann erhält man etwa den in Abb. 3 gezeigten Verlauf. Daraus sieht man, daß bei vorgegebenem Druckunterschied höchstens die dem Tiefstwert der Kurve entsprechende Menge überhaupt durchgesetzt werden kann. Bei freiem Zu- und Ablauf wird die Strömung sicherlich so verlaufen, daß dieser maximale Durchfluß erreicht wird. Damit ist der Halbmesser R_i des Totwasserkernes eindeutig festgelegt. Ist dagegen der Zulauf begrenzt, dann bewegt man sich auf dem rechten Ast der Kurve. Denn würde man sich auf dem linken Ast befinden, so würde unter dem Einfluß des radialen Druckanstieges an der Außenwand ein höherer Druck auftreten, als bei freiem Abfluß aufrechterhalten werden kann. Ist umgekehrt der Abfluß behindert, dann wird die strömende Flüssigkeit aufgestaut und man befindet sich auf dem linken Ast.

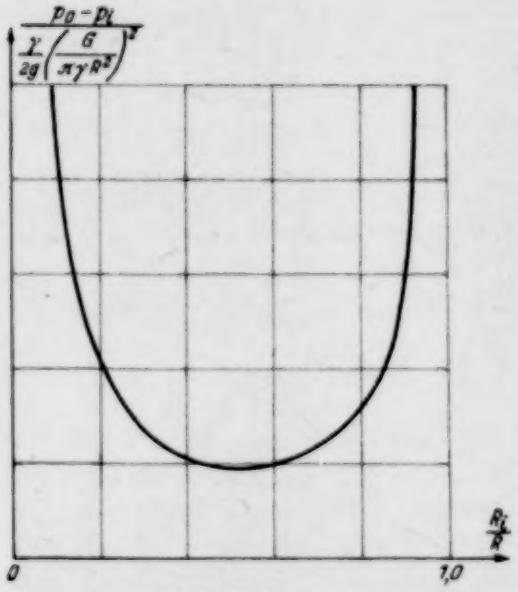

Abb. 3. Verlauf des relativen Druckgefälles einer Drallströmung.

Wird der der Strömung zur Verfügung stehende Raum nach innen zu durch eine Nabe begrenzt, deren Halbmesser R_n kleiner ist als der Halbmesser des auf Grund dieser Überlegungen zu erwartenden Totwasserkernes, so wird die Anwesenheit derselben bei reibungsfreier Flüssigkeit keinen Einfluß auf die Strömung ausüben. Ist R_n dagegen größer, so wird die Strömung durch die Nabe bestimmt. Der Innenhalbmesser der Strömung ist dann gleich R_n.

3. Wichtige Formen der Drallströmung. Von den überhaupt möglichen Formen der Drallströmung beanspruchen im Strömungsmaschinenbau zwei das besondere Interesse. Das ist einmal die wirbelfreie Drallströmung, wie sie in radialen und in axialen Leiträdern dann entsteht, wenn die Schaufeln nach dem Drallsatz ($c_u r = \text{konst}$) verwunden sind. Beim Durchströmen eines Axialrades mit unverwundenen (geraden) Schaufeln ($\alpha_1 = \text{konst}$) erhalten die von Saug- und Druckseite abfließenden Teilchen verschiedene Geschwindigkeiten. Man hat also hinter jeder solchen Schaufel eine Diskontinuitätsfläche. In dem der Rechnung zugänglichen Fall kontinuierlicher Beschaufelung (unendlich viele Schaufeln) verteilen sich die Wirbel dieser Trennflächen über die gesamte Flüssigkeit. Man erhält also an Stelle der wirbelfreien Potentialströmung eine wirbelbehaftete Form reibungsfreier Strömung.

Im Leitrad verläuft die Strömung auf Zwangsbahnen, das Verhältnis von Axial- und Umfangsgeschwindigkeit ist an jeder Stelle vorgeschrieben. Daraus ergeben sich, selbst wenn von

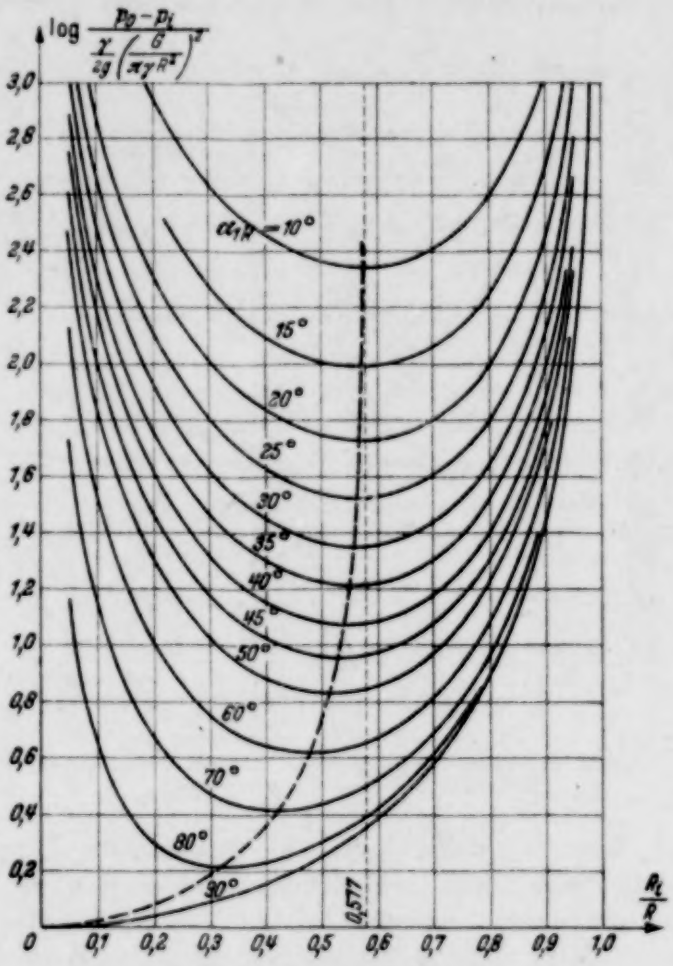

Abb. 4. Relatives Druckgefälle im Leitrad mit drallverwundenen Schaufeln.

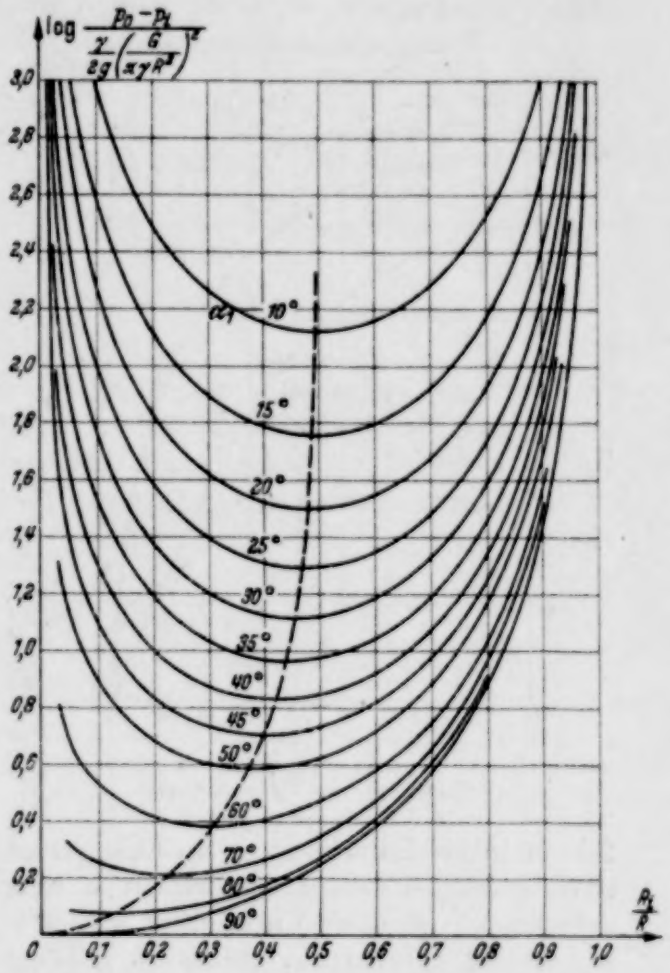

Abb. 5. Relatives Druckgefälle im Leitrad mit geraden Schaufeln.

der eigentlichen mit Impulsabgabe verbundenen Umlenkung abgesehen wird, Bedingungen, die im schaufelfreien Raum nicht gestellt werden. Um den Einfluß dieser Bedingungen kennenzulernen, nehmen wir vorerst einmal an, daß nach vollzogener Umlenkung die Schaufeln des Gitters sich mit dem zuletzt erhaltenen Winkel noch ein Stück in den dahinterliegenden Raum fortsetzen mögen; etwaige Radialbewegungen sollen bereits abgeklungen sein. Die für das Auftreten von Totwassergebieten maßgebende Größe ist, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben, das relative Druckgefälle $(p_0 - p_i)/\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2$. Die Berechnung dieses Wertes bei gegebenem Strömungswinkel α_1 wird in Abschnitt 7 durchgeführt. Ihre Ergebnisse sind für die drallverwundene Leitradbeschaufelung in Abb. 4 und für die gerade in Abb. 5 wiedergegeben. Das relative Druckgefälle ist logarithmisch aufgetragen. Parameter ist der Strömungswinkel α_1 bzw. α_{1R}; bei der drallverwundenen Schaufel ist α_{1R} der Winkel am Außenrand der Strömung[1]. Es

[1] Der Austrittswinkel bei verwundenen Schaufeln wird am besten auf den Außenrand bezogen, da die Strömung hier anliegt.

zeigt sich, daß das relative Druckgefälle weitgehend vom Strömungswinkel abhängig ist. Je größer der Strömungswinkel, also je kleiner die Umlenkung, desto tiefer liegt die zugehörige Kurve.

Die Kurve für den Strömungswinkel $\alpha_1 = 90°$ entspricht einer rein axialen Durchströmung; ihr Tiefstwert liegt bei $R_i/R = 0$. Ein Totwasser ist also hier nicht möglich. Bei eingebauter Nabe befindet man sich gleich auf dem rechten Ast. Die Strömung liegt stets an.

Die Kurvenscharen für drallverwundene und für gerade Schaufeln sind, wie zu erwarten, in ihrem Gesamtverlauf nicht sehr voneinander verschieden. Die gestrichelten Linien in Abb. 4 und 5 verbinden die Tiefstwerte der einzelnen Kurven; sie nähern sich für kleine Winkel dem Wert $R_i/R = 0{,}577$ bei drallverwundenen und dem Wert $R_i/R = 0{,}5$ bei geraden Schaufeln. Man braucht also mit Totwasserbildung an der Nabe dann nicht zu rechnen, wenn man mit dem Nabenverhältnis R_n/R rechts der gestrichelten Linie bleibt. Bei der Planung wird man mit dem Nabenverhältnis tunlichst nicht unter diese vom Strömungswinkel abhängige Grenze heruntergehen, wenn man die Beschaufelung über die ganze Höhe ausnutzen will. In Abb. 6 ist dieses Grenzverhältnis für verwundene und gerade

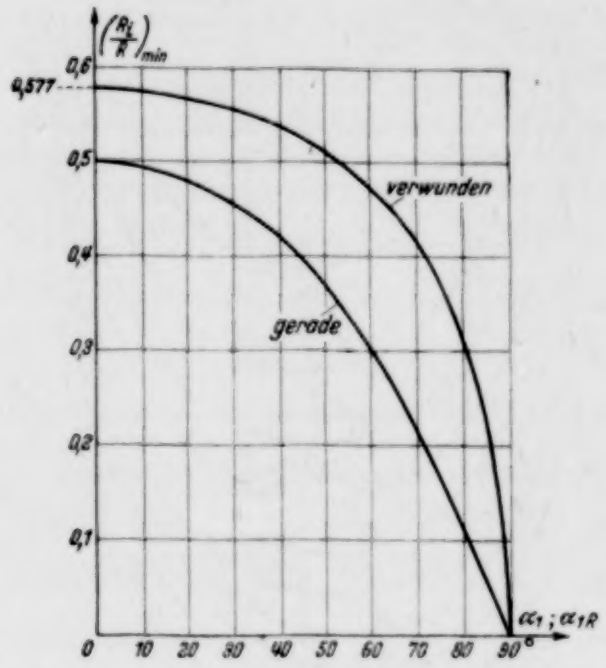

Abb. 6. Grenze des ausnutzbaren Halbmesserverhältnisses in Abhängigkeit vom Strömungswinkel.

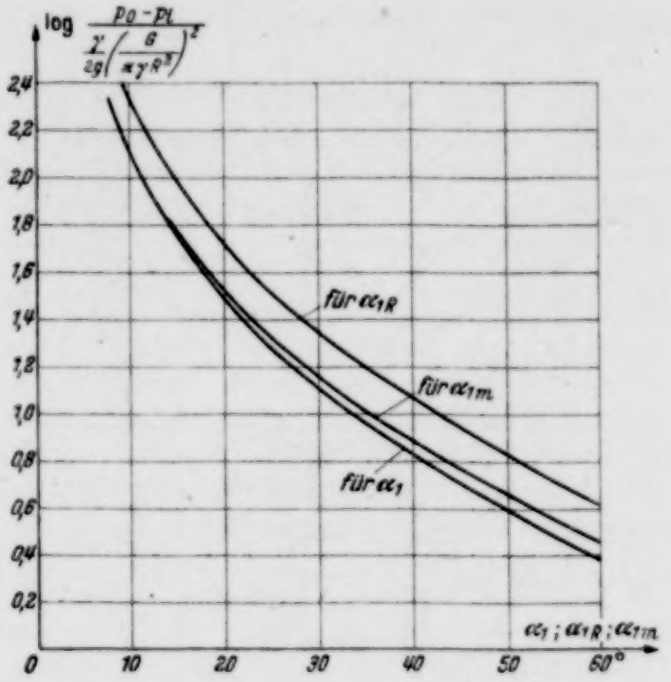

Abb. 7. Erreichbarer Kleinstwert des relativen Druckgefälles in Abhängigkeit vom Strömungswinkel.

Schaufeln als Funktion des Strömungswinkels α_1 bzw. α_{1R} dargestellt, während in Abb. 7 der erreichbare Kleinstwert des relativen Druckgefälles über dem Strömungswinkel α_1 bzw. α_{1R} aufgetragen ist. Der Unterschied dieser beiden Kurven ist indessen in Abb. 7 nur scheinbar und darauf zurückzuführen, daß α_{1R} der größte in der Potentialströmung vorhandene Winkel ist. Bezieht man das relative Druckgefälle auf den mittleren Winkel α_{1m} ($\operatorname{tg} \alpha_{1m} = \operatorname{tg} \alpha_{1R} R_m/R$) an der Stelle $R_m = \frac{1}{2}(R_i + R_a)$, so sieht man, daß sich die beiden Strömungen in bezug auf die Druck- und Durchsatzverhältnisse nur unwesentlich voneinander unterscheiden.

Befindet sich hinter dem Leitrad kein Laufrad, sondern ein schaufelloser zylindrischer Raum (Abb. 1), wie das bei den Versuchen an axialen Leiträdern von *Hartmann*[1] und *Korbacher*[2] der Fall war, so kann selbst bei ablösungsfreier Durchströmung des Leitrades hinter demselben unter Umständen ein Totwassergebiet auftreten. Im folgenden seien die Voraussetzungen hierfür näher untersucht. Dabei wird unmittelbar hinter dem Leitrad die eben behandelte Strömung zugrunde gelegt. Im schaufelfreien Raum ist die Strömung nicht mehr an den vorgeschriebenen Strömungswinkel gebunden. Wohl aber muß dort der Drehimpuls der einzelnen Teilchen, wie er ihnen im Leitrad erteilt wurde, erhalten bleiben. Die für das Verhalten der Drallströmung entscheidende Kurve wird sich infolge der geänderten Bedingungen von der für die Verhältnisse im Leitrad erhaltenen unterscheiden. Mit Hilfe von Abb. 8 lassen sich die hieraus folgenden Überlegungen kurz darstellen. Die Änderung des relativen Druckgefälles im Leitrad bei Variation des Innenhalbmessers der Strömung ist durch die Leitradkurve gegeben. Für die mit dem Halbmesser-

[1] *W. Hartmann*. VDI-Forsch.-Heft 397 (1939).
[2] Siehe Fußnote 2 von S. 367.

verhältnis R_{1i}/R aus dem Leitrad ausströmende Flüssigkeit ändert sich im schaufelfreien Raum das Druckgefälle nach der anderen Kurve. Der Kreuzungspunkt A der beiden Kurven liegt in Abb. 8 auf dem linken Ast der Kurve für den schaufellosen Raum. Der für das zylindrische Fortlaufen der Strömung erforderliche hohe Druck am Außenrand kann bei freiem Ablauf nicht aufrecht erhalten werden, da die Flüssigkeit jetzt die Möglichkeit hat, mit dem dem Punkt B entsprechenden Innenhalbmesser weiter zu verlaufen. Die Strömung nimmt den neuen Halbmesser R_{iB} erst nach einer gewissen Wegstrecke an. Während des Überganges muß in der Trennfläche

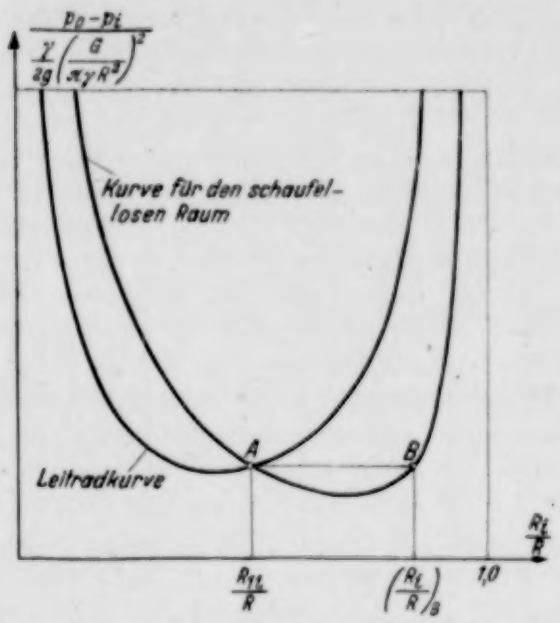

Abb. 8. Übergang vom beschaufelten zum schaufellosen Raum.

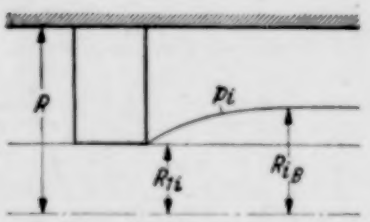

Abb. 9. Strömungsverlauf hinter dem Leitrad.

— wenigstens bei reibungsfreier Flüssigkeit — stets derselbe Druck p_i herrschen. In Abb. 8 bewegt man sich daher von A nach B auf einer Parallelen zur Abszissenachse. Beide Kurven sind für jeweils zylindrische Strömung berechnet. Der dem Abstand zwischen der Geraden AB und dem darunterliegenden Stück dieser Kurve entsprechende Drucküberschuß wird durch die Radialbeschleunigung aufgezehrt. Die Strömung verläuft etwa nach Abb. 9.

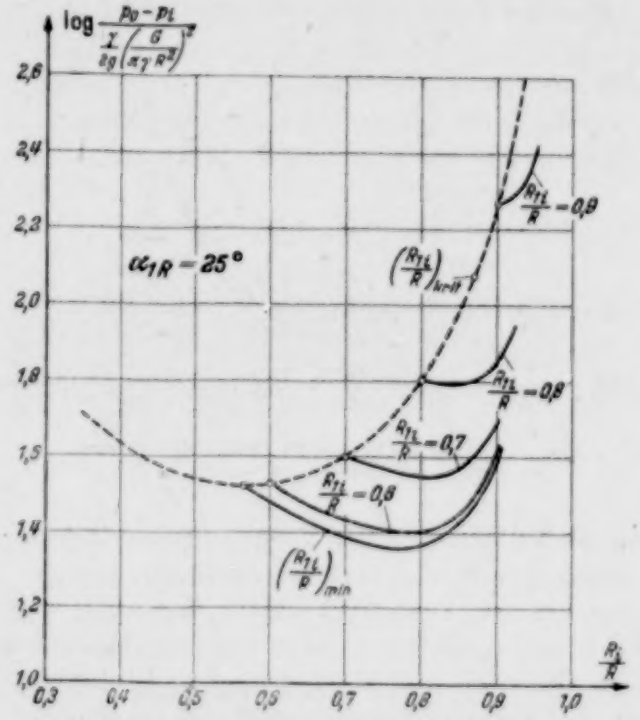

Abb. 10. Relatives Druckgefälle hinter dem Leitrad bei drallverwundenen Schaufeln ($\alpha_{1R} = 25°$).

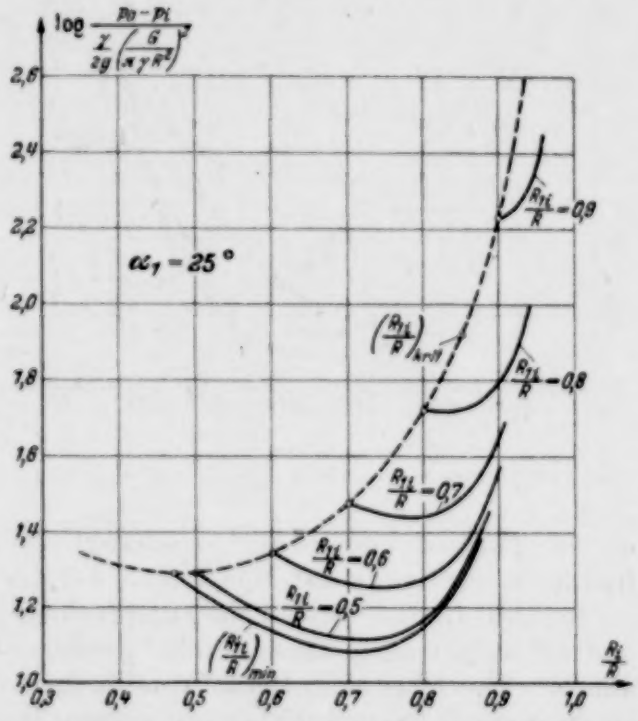

Abb. 11. Relatives Druckgefälle hinter dem Leitrad bei geraden Schaufeln ($\alpha_1 = 25°$).

Als Beispiel aus den Ergebnissen der nachfolgenden Rechnungen sind in Abb. 10 und 11 die Werte für das relative Druckgefälle hinter einem Leitrad mit verwundenen ($\alpha_{1R} = 25°$) und geraden Schaufeln ($\alpha_1 = 25°$) aufgetragen. Die gestrichelte Kurve ist Bestandteil der bereits in Abb. 4 und 5 dargestellten und gibt die Charakteristik des Leitrades wieder. Die ausgezogenen Kurven sind die Charakteristiken der Strömungen, die mit dem Halbmesserverhältnis R_{1i}/R

das Leitrad verlassen haben. Die einzelnen Kurven unterscheiden sich durch den R_{1i}/R-Wert des Austrittspunktes. Dieser liegt bei einigen Kurven, so wie wir in Abb. 8 angenommen hatten, auf dem linken Ast. Damit sind die oben geschilderten Erscheinungen zu erwarten. Für größere Halbmesserverhältnisse befindet sich der Austrittspunkt aus dem Leitrad bereits auf dem rechten Ast der Kurven für den schaufellosen Raum. Damit fehlt die Voraussetzung für das Entstehen eines Totwassers hinter dem Leitrad, die Strömung verläuft hier weiterhin zylindrisch. Es gibt demnach ein Halbmesserverhältnis $(R_{1i}/R)_{krit}$, von dem ab die Strömung nach dem Austritt aus dem Leitrad keine Veränderungen erfährt.

Die vom linken Ast der Leitradkurve abzweigenden Kurven für den schaufellosen Raum wurden nicht gezeichnet, da diese Strömungen schon im Leitrad einen Aufstau bedingten (Hinder-

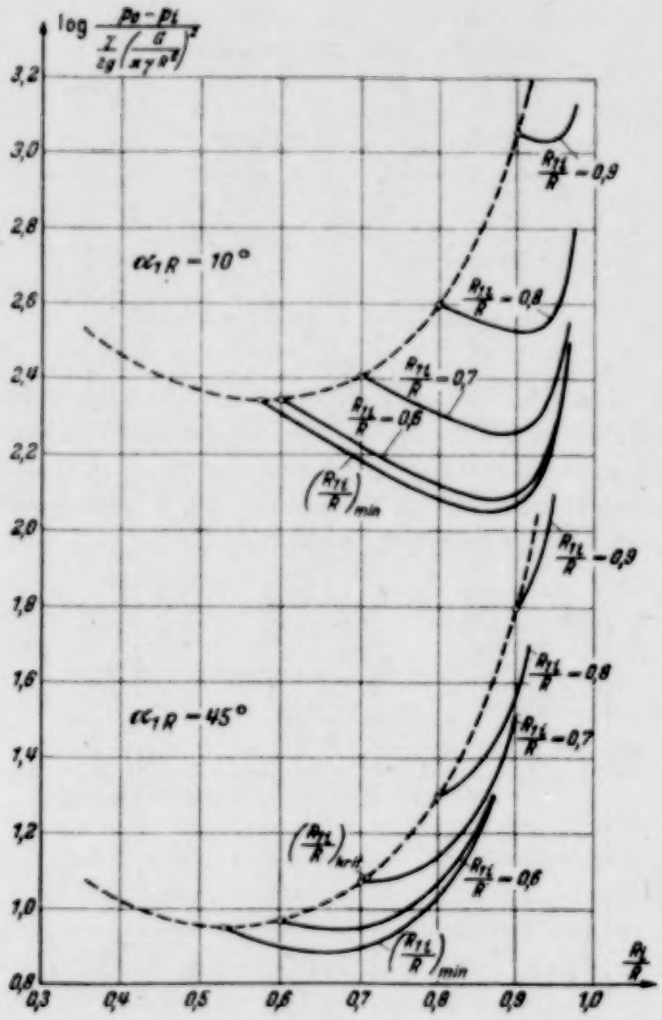

Abb. 12. Relatives Druckgefälle hinter dem Leitrad bei drallverwundenen Schaufeln ($\alpha_{1R} = 10°$ und $\alpha_{1R} = 45°$).

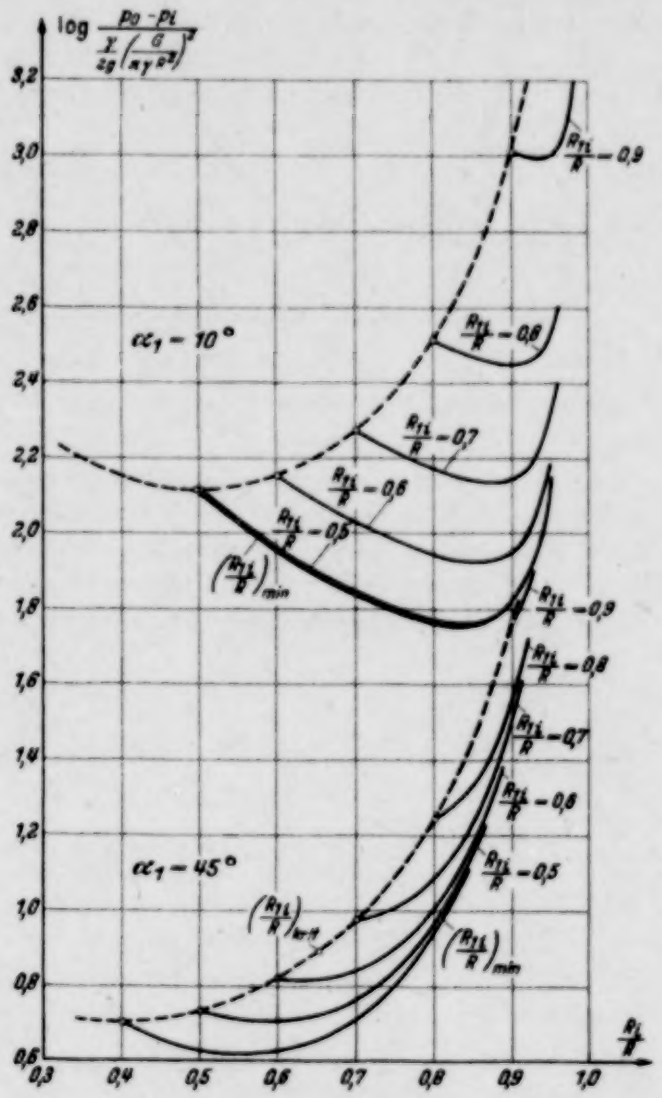

Abb. 13. Relatives Druckgefälle hinter dem Leitrad bei geraden Schaufeln ($\alpha_1 = 10°$ und $\alpha_1 = 45°$).

nis im späteren Verlauf der Strömung). In solchen Fällen würde aber auch im schaufelfreien Raum die Strömung auf dem linken Ast der dort geltenden Kurve verlaufen müssen.

In Abb. 12 und 13 sind die entsprechenden Werte für den Austrittswinkel α_1 bzw. $\alpha_{1R} = 10°$ und 45° aufgetragen. Diese Winkel dürften etwa die Grenzen des bei axialen Turbinenleiträdern üblichen Bereiches sein. Beide Abbildungen zeigen anschaulich, daß bei der starken Umlenkung die Neigung der Strömung, sich abzulösen, groß wird und der Strömungsquerschnitt im schaufellosen Raum beachtlich abnimmt. Das Halbmesserverhältnis $(R_{1i}/R)_{krit}$ hat einen hohen Wert. Umgekehrt ist bei kleiner Umlenkung die Ablösungsgefahr gering; $(R_{1i}/R)_{krit}$ liegt niedrig. Das für die Ablösungserscheinungen hinter dem Leitrad wichtige kritische Halbmesserverhältnis $(R_{1i}/R)_{krit}$ ist in Abb. 14 in Abhängigkeit vom Austrittswinkel α_1 bzw. α_{1R} wiedergegeben.

4. Die Strömung in und hinter dem Leitrad. Aus den bisherigen Betrachtungen geht hervor, daß eine mit Drall behaftete Strömung nur einen Ringquerschnitt einnehmen kann. Dabei war es für unsere Überlegungen gleichgültig, ob der von der Strömung nicht eingenommene Teil

mit Totwasser gefüllt war oder ob sich dort eine feste Nabe befand. In der Strömung wirklicher Flüssigkeiten sucht man möglichst Totwassergebiete zu vermeiden, da sie Anlaß zur Wirbelbildung sind und damit zu Verlusten der nutzbaren Energie führen. Im folgenden wird untersucht, wie die Strömung bei verschiedenen Nabenhalbmessern verläuft.

Die Verhältnisse bei fehlender oder kleiner Nabe sind in Abb. 15 dargestellt. Der Ringquerschnitt wird durch die Gehäusewand und die Nabe gebildet. Bei beispielsweise drallfreiem Zustrom ($\alpha_0 = 90°$) hat man es vor dem Leitrad mit gleichförmiger anliegender Strömung zu tun. Im Leitrad erfolgt die Umlenkung bis auf den Strömungswinkel α_1 im Austritt. Die Winkel in den dazwischenliegenden Schnittebenen des Leitrades mögen mit α bezeichnet werden. Denkt man sich diesen Vorgang unendlich langsam vollzogen, dann gelten die bereits angestellten Überlegungen bezüglich des relativen Druckgefälles für alle senkrecht zur Achse gelegten Schnitte durch das Leitrad. Jedem dieser Schnitte entspricht ein anderes α. Abb. 16 enthält die Charakteristiken von $\alpha = \alpha_0$ bis α_1. Ist das Nabenverhältnis R_n/R kleiner als das dem Austrittswinkel α_1 entsprechende $(R_{1i}/R)_{min}$, dann ist der höchstmögliche Durchsatz durch das Minimum der Charakteristik des Winkels α_1 bestimmt (Punkt A). Am Ende der Umlenkung muß daher der dem Punkt A entsprechende Halbmesser R_{1i} erreicht werden, also bereits im Leitrad ein Totwassergebiet entstehen. An der Grenze zwischen Strömung und Totwasser ist der Druck p_i konstant und gleich dem Gegendruck p_a. Solange dieser statische Druck an der Nabe nicht erreicht ist, liegt die Strömung an. Im Diagramm von Abb. 16 entspricht das der Geraden DC, wenn durch D der Eintrittszustand in das Leitrad wiedergegeben wird. Wird im Zuge der Umlenkung der Strömungswinkel α_C erreicht, so beginnt die Strömung sich von der Nabe abzulösen. Da von nun an das relative Druckgefälle konstant bleibt, bewegen wir uns auf der Geraden CA.

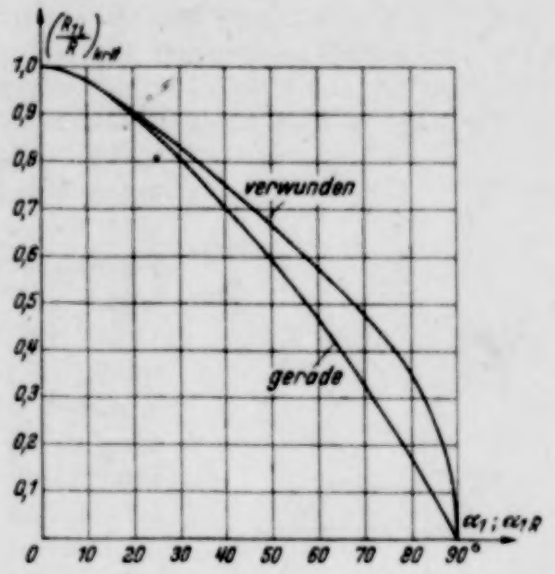

Abb. 14. Kritisches Halbmesserverhältnis in Abhängigkeit vom Austrittswinkel.

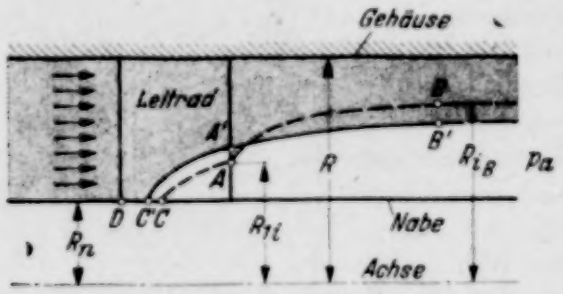

Abb. 13. Strömung durch das Leitrad bei kleiner Nabe ($R_n < R_{1i\,min}$).

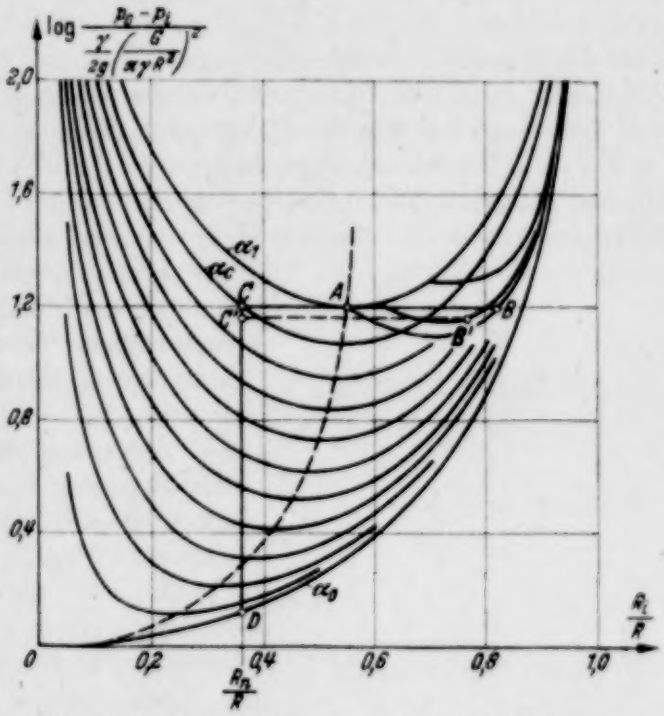

Abb. 16. Druckgefällediagramm des Leitrades ($R_n < R_{1i\,min}$).

Die Berandung des Totwassers bei den nun in der Folge erreichten Winkeln kann aus den Schnittpunkten mit den zugehörigen α-Kurven bestimmt werden. Bei den einzelnen α-Kurven bewegt man sich auf den linken Ästen, da der höchste Druckwiderstand durch den Ausströmwinkel α_1 gegeben ist.

Tritt diese Strömung in den schaufellosen Raum, dann bewegt man sich, wie bereits geschildert wurde, von Punkt A waagerecht nach B (Abb. 16). Der Verlauf der so erhaltenen Trennlinie in und hinter dem Leitrad ist in Abb. 15 gestrichelt eingezeichnet (Linie CAB).

Bei den bisherigen Überlegungen wurde außer acht gelassen, daß die Veränderung der Strömung im schaufellosen Raum bereits Rückwirkungen auf die Strömung im Leitrad nach sich

zieht. Um das Wesen dieser Rückwirkungen zu verstehen, sollen die Verhältnisse an einem besonders einfachen Beispiel untersucht werden. Dabei wird angenommen, eine drallbehaftete Strömung trete aus einem zylindrischen Rohr in den freien Raum aus (Abb. 17). In genügender Entfernung vor dem Auslauf wird sie zylindrisch verlaufen (etwa bis Ebene $A-A$). Hier befolgt sie die bekannten Gesetze einer Drallströmung; ihre Durchflußcharakteristik gibt Kurve a (Abb. 18) wieder. In der Ebene $B-B$ hört der von der Rohrwand auf die Flüssigkeit ausgeübte Druck auf; die einzelnen Flüssigkeitsteilchen fließen geradlinig in der in der Ebene $B-B$ erlangten Strömungsrichtung weiter. Ein Druckanstieg in der Flüssigkeit ist nicht mehr vorhanden. Da in den Ebenen $A-A$ und $B-B$ die Drücke auf der inneren Trennfläche gleich sind, muß also an der Rohrwand ein Druckabfall in Richtung $A-B$ auftreten. Dann müssen aber auf der Strecke $A-B$ bereits Radialbewegungen der innersten Strömungsschichten eingesetzt haben; das Halbmesserverhältnis R_i/R muß also größer geworden sein. Der eigentliche Grund für das Wiederansteigen des linken Astes der Durchflußcharakteristik a in Abb. 18 liegt in dem radialen Druckanstieg der Drallströmung. Trägt man das relative Druckgefälle in Abhängigkeit vom Halbmesserverhältnis R_i/R für die Stelle $B-B$ auf, dann nimmt es nach der Achse zu stetig ab (Kurve b in Abb. 18). Da der Halbmesser R_i von A nach B, wie wir gesehen haben, wächst, der Durchsatz aber der gleiche bleibt, liegen alle Punkte der Kurve b rechts von den entsprechenden Punkten der Kurve a. Die Kurve b liegt also in ihrem gesamten Verlauf unterhalb der Kurve a. Indessen muß aber die Kurve b in ihrem ganzen Verlauf oberhalb der in Abb. 16 dargestellten Kurve für $\alpha_0 = 90°$ liegen, da hier, im Gegensatz zu dort, ein beträchtlicher Teil des Druckgefälles für die Geschwindigkeit in Umfangsrichtung aufgezehrt wird.

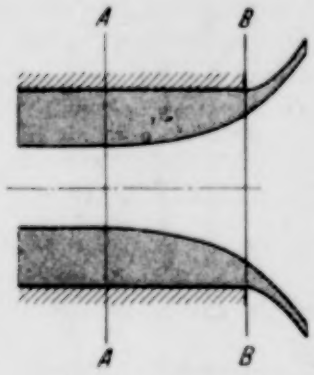

Abb. 17. Freier Ausfluß einer Drallströmung.

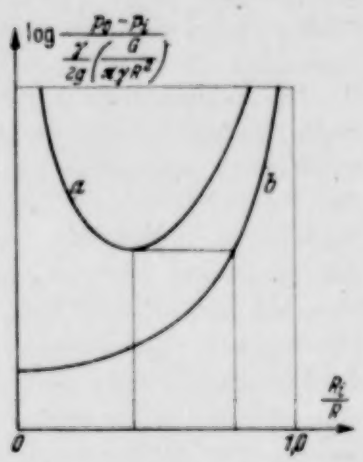

Abb. 18. Relatives Druckgefälle beim freien Ausfluß einer Drallströmung.

Da, wie bereits eingangs festgestellt wurde, der der zylindrischen Strömung im Leitrad entsprechende hohe Druck an der Außenwand im schaufellosen Raum hinter dem Leitrad nicht auftreten kann, hat man bei dem Austritt aus dem Leitrad ähnliche Verhältnisse wie bei dem zuvor untersuchten Fall des freien Abflusses. Die Flüssigkeit wird in der Austrittsebene des Leitrades ebenfalls radiale Bewegungen ausführen, und damit wird die charakteristische Kurve dieser Strömung tiefer liegen als die bisher angenommene für den gleichen Winkel. Stellt man sich wieder die Leitschaufeln nach erfolgter Umlenkung ein Stück l_1 unter dem Austrittswinkel α_1 weitergeführt vor (Abb. 19), dann wird vor der Austrittsebene $B-B$ eine Ebene $A-A$ liegen, in der die Strömung zylindrisch verläuft. Diesen beiden Ebenen entsprechen die beiden Kurven a und b in Abb. 20. Sie gehören zum gleichen Strömungswinkel α_1; der Unterschied besteht lediglich darin, daß Kurve a für rein zylindrische, Kurve b dagegen für Bewegungen mit Radialkomponente gilt. Der Durchfluß wird durch das Minimum der Kurve a bestimmt. Verkleinert man nun den Abstand l_1, so wird die Ebene $A-A$ an das eigentliche Leitrad heran- und schließlich in dieses hineinrücken. Fehlt die gedachte Schaufelverlängerung, dann befinden sich die den Ebenen $A-A$ bzw. $B-B$ analogen Ebenen in $A'-A'$ bzw. $B'-B'$. Der Durchsatz wird wieder durch Ebene $A'-A'$ bestimmt. An dieser Stelle ist jedoch die Umlenkung noch nicht vollendet; der Strömungswinkel ist hier $\alpha > \alpha_1$. Diesem Strömungswinkel entspricht in Abb. 20 die Kurve a'. Der Durchsatz durch das Leitrad ist also nicht durch das Minimum der Kurve a, sondern durch das tiefer liegende Minimum der Kurve a' bestimmt.

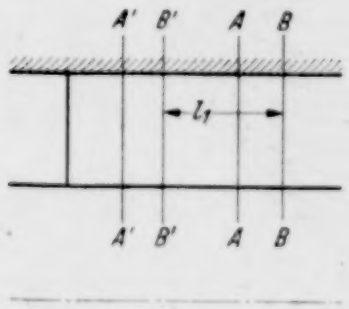

Abb. 19. Ausfluß aus dem Leitrad.

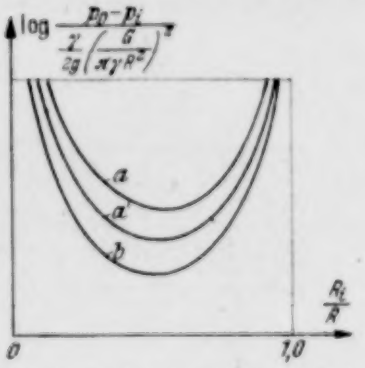

Abb. 20. Relatives Druckgefälle beim Austritt aus dem Leitrad.

Das relative Druckgefälle im Leitrad ist demnach kleiner als bisher angenommen wurde. Die der Berandung des Totwasserkernes entsprechende Linie CAB in Abb. 16 ist also durch die tiefer gelegene Linie $C'B'$ zu ersetzen. Die Lage des Punktes A' auf dieser Linie ist aus dem Diagramm nicht zu entnehmen. Da jedoch die Austrittswirkung auf zusätzlich nach außen gerichteten Radialbewegungen beruht, muß er sich rechts vom Punkt A, also in Abb. 15 oberhalb von A befinden. Der Punkt B' wird auf einer einem höheren R_{1i}/R zugehörigen Kurve als Punkt B liegen. Da sich B' nur auf einer der rechts von A liegenden Abzweigkurven befinden kann und deren Minima höher liegen als das der bei A abzweigenden Kurve, muß $C'-B'$ höher liegen als dieses Minimum. B' muß sich also immer links von B befinden; der Halbmesser $R_{iB'}$ ist folglich kleiner als R_{iB}.

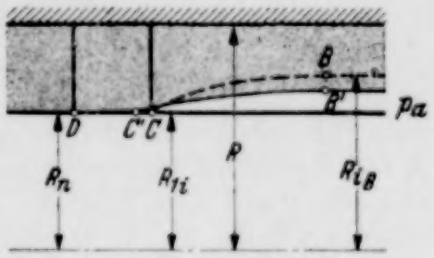

Abb. 21. Strömung durch das Leitrad bei mittlerer Nabe. $R_{1i\,\min} \leqq R_n < R_{1i\,\mathrm{krit}}$.

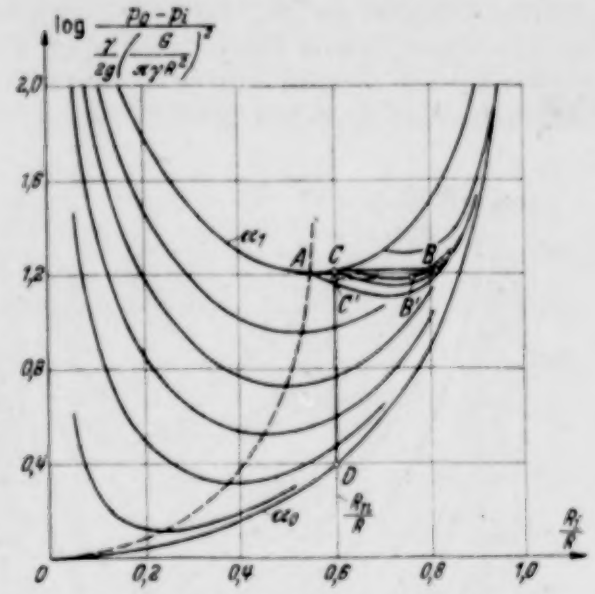

Abb. 22. Druckgefällediagramm des Leitrades ($R_{1i\,\min} \leqq R_n < R_{1i\,\mathrm{krit}}$).

Nun sei der Fall betrachtet, daß der Nabenhalbmesser R_n gleich oder größer ist als das dem Austrittswinkel α_1 entsprechende $R_{1i\,\min}$, aber kleiner ist als $R_{1i\,\mathrm{krit}}$. Die Strömung ist in Abb. 21 dargestellt. Vernachlässigt man die Austrittswirkung, dann hat man im Leitrad an der Nabe keine Ablösung. Der Punkt C stellt in Abb. 22 den Austrittspunkt der Strömung aus dem Leitrad dar. Im schaufellosen Raum erhält man schließlich eine Strömung, die dem Punkt B entspricht. Der Strömungsverlauf ist in Abb. 21 gestrichelt eingezeichnet. Berücksichtigt man die Austrittswirkung, dann hat man zu erwarten, daß das relative Druckgefälle etwas vermindert wird. Man erhält dann in Abb. 22 an Stelle von CB die Linie $C'B'$. Infolge der zusätzlichen Radialbewegungen beginnt die Ablösung schon im Leitrad. Im schaufellosen Raum stellt sich als entgültiger Strömungshalbmesser $R_{iB'} < R_{iB}$ ein. Den Verlauf der Trennfläche zeigt die ausgezogene Linie in Abb. 21.

Ist der Nabenhalbmesser R_n größer als das dem Austrittswinkel α_1 entsprechende $R_{1i\,\mathrm{krit}}$, dann liegt die Strömung sowohl im Leitrad als auch im schaufellosen Raum an. Die Strömung verläuft rein zylindrisch; eine Austrittswirkung ist nicht zu erwarten (siehe Abb. 23).

Der Vergleich der Strömungsbilder 15, 21 und 23 zeigt also in anschaulicher Weise den Einfluß der Nabengröße auf die Strömung in und hinter dem Leitrad.

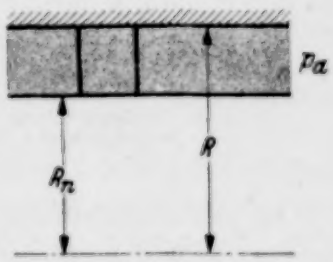

Abb. 23. Strömung durch das Leitrad bei großer Nabe ($R_n \geqq R_{1i\,\mathrm{krit}}$).

5. Die Änderung des Strömungswinkels hinter dem Leitrad. Ändert sich nach dem Austritt aus dem Leitrad der Strömungsquerschnitt infolge Auftretens von Totwasser, so ist damit eine Änderung des Strömungswinkels verbunden. Größe und Art dieser Änderung lassen sich am besten in der wirbelfreien Strömung, wie sie hinter drallverwundenen Schaufeln auftritt, übersehen. Deshalb wollen wir diese Form zunächst behandeln.

In der wirbelfreien Strömung ist die Axialgeschwindigkeit über den ganzen Strömungsquerschnitt konstant; sie muß um so größer sein, je kleiner dieser ist. Unmittelbar hinter dem Leitrad haben alle Flüssigkeitsteilchen den gleichen Drall. Da dieser bei den hier betrachteten Veränderungen der Strömung für die einzelnen Teilchen erhalten bleibt, ist sein Wert auch über den geänderten Strömungsquerschnitt konstant. Die Umfangsgeschwindigkeiten am Leitrad-

austritt und in der neuen Strömung sind also auf gleichen Halbmessern jeweils gleich. Die Änderung des Strömungswinkels auf gleichen Halbmessern beruht ausschließlich auf der Zunahme der Axialgeschwindigkeit. Damit wird der Strömungswinkel ($\operatorname{tg}\alpha = c_m/c_u$) größer, die im Leitrad erzielte Umlenkung zum Teil wieder rückgängig gemacht. Anschaulich lassen sich die Verhältnisse im Druckgefällediagramm darstellen. Die ausgezogenen Linien in Abb. 24 stellen wieder die bekannten Leitradkurven für verschiedene Strömungswinkel α_{1R} dar. Auf einer solchen Kurve ist bekanntlich der Strömungswinkel konstant; der Wert des Dralles ist für die einzelnen Punkte auf der Kurve verschieden. Die gestrichelten Linien in Abb. 24 sind die Kurven für den schaufellosen Raum; auf ihnen ist jeweils der Drall konstant. Verläßt beispielsweise die Strömung das Leitrad mit dem Austrittswinkel $\alpha_{1R} = 30°$ in Punkt A, so wird sie bekanntlich im schaufelfreien Raum nach Punkt B umschlagen. Durch diesen Punkt verläuft die Leitradkurve mit dem Winkel $\alpha'_{1R} = 50°$. Dieser ist also der neue Strömungswinkel in B, da wirbelfreie Strömungen inner- und außerhalb des Leitrades bei gleichen Strömungswinkeln identisch sind. Gleicherweise kann man aus Abb. 24 die Winkel entnehmen, die zu erwarten sind, wenn die Strömung von einem anderen Austrittspunkt A ausgeht. Im gezeichneten Fall hätte also die Strömung in Punkt B sofort erhalten werden können, wenn man ein Leitrad mit den Winkeln α'_{1R} und dem Nabenverhältnis R_{iB}/R gewählt hätte. Es hat daher unter Umständen wenig Sinn, bei kleinem Nabenverhältnis zu große Umlenkungen zu wählen, da sie durch die mögliche Ablösung ohnehin wieder verringert werden.

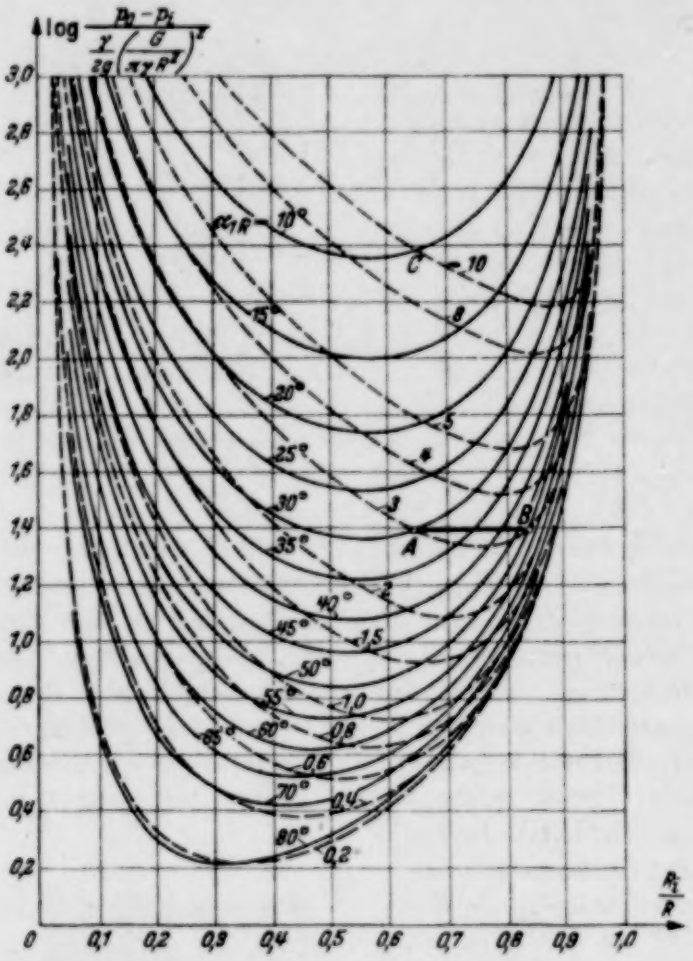

Abb. 24. Winkeländerung im schaufellosen Raum bei wirbelfreier Drallströmung.

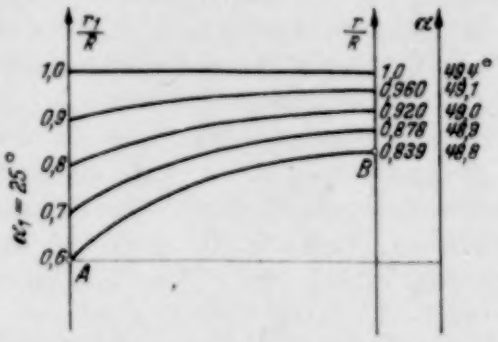

Abb. 25. Stromlinienverlauf hinter einem axialen Leitrad (gerade Schaufeln; wirbelbehaftete Drallströmung).

Die charakteristische Eigenschaft der wirbelfreien Drallströmung war, daß die Umfangsgeschwindigkeit beim Austritt aus dem Leitrad dem Drallsatz $c_{u1}\, r = \text{konst}$ genügte. Diese Eigenschaft bleibt auch bei der nachfolgenden Strömung im schaufellosen Raum bestehen. Die Strömung hinter Leiträdern mit geraden Schaufeln ist indessen dadurch gekennzeichnet, daß der Strömungswinkel beim Austritt aus dem Leitrad über den ganzen Querschnitt konstant ist. Die Umfangsgeschwindigkeit folgt dem Gesetz $c_{u1}\, r_1^{\cos^2 \alpha_1} = \text{konst}$, die Axialgeschwindigkeit $c_{m1}\, r_1^{\cos^2 \alpha_1} = \text{konst}$[1]. Ändert sich im schaufellosen Raum der Innenhalbmesser der Strömung, dann bleiben diese Eigenschaften nicht mehr erhalten. Der Fall ist daher weit schwieriger zu übersehen als der der oben behandelten wirbelfreien Strömung. Die neu auftretenden Winkel können jeweils nur aus der strengen Durchrechnung ermittelt werden. Die Ableitungen hierfür befinden sich im Abschnitt 7. In Abb. 25 ist für $\alpha_1 = 25°$ und $R_n/R = 0{,}6$ der Strömungsverlauf hinter dem Leitrad in anschaulicher Weise dargestellt. Die einzelnen Teilchen verlassen das Leitrad mit dem Halbmesserverhältnis r_1/R und dem Strömungswinkel α_1. Im weiteren Verlauf

[1] *E. Eckert* und *G. Korbacher*, Forsch.-Ber. 1750 dtsch. Luftf.-Forschg. (1943); siehe auch im folgenden Abschnitt 7. G. (14).

der Strömung erreichen sie das Halbmesserverhältnis r/R und die Strömungswinkel α. Für jede gezeichnete Bahn ist links r_1/R, rechts r/R und α angegeben. Man sieht, daß in B der Strömungswinkel über den Querschnitt nicht mehr konstant ist. Diese Strömung hätte durch ein Leitrad mit geraden Schaufeln nicht unmittelbar erzeugt werden können.

6. Die Verhältnisse beim radialen Leitrad. Bei Propellerturbinen (z. B. Kaplanturbinen) erhält die Flüssigkeit ihren Drall in einem radialen Leitrad. Im nachfolgenden schaufellosen Raum wird sie abgelenkt und strömt dem Laufrad axial zu (Abb. 26). Die Flüssigkeit verläßt das Leitrad ohne axiale Geschwindigkeitskomponente und dringt zunächst in den Raum $ABCD$ ein. Hier verdrängt sie die unter dem geringeren statischen Druck p_a stehende Flüssigkeit. Auch in diesem Fall können die einzelnen Flüssigkeitsteilchen nicht geradlinig weiterströmen, sondern müssen radial zur Achse hin beschleunigt werden. Das setzt wieder ein Druckgefälle vom Schaufelkranz zur Achsmitte hin voraus. An der Trennfläche zur ruhenden Flüssigkeit herrscht der Druck p_a; infolge des radialen Druckanstieges am Schaufelaustritt ein entsprechend höherer Druck, der begrenzt ist durch die Abflußmöglichkeit der Flüssigkeit längs der Berandung DE bzw. CF. Es muß sich also ein die Umlenkung erzwingender axialer Druckgradient ausbilden. Dem entspricht eine nach oben verjüngte Trennfläche. Im weiteren Verlauf, etwa in der Ebene EF, wird die Strömung zylindrisch verlaufen. Nimmt man an, daß am Schaufelaustritt der axiale

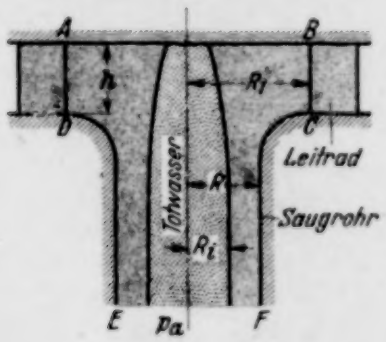

Abb. 26. Strömung hinter einem radialen Leitrad.

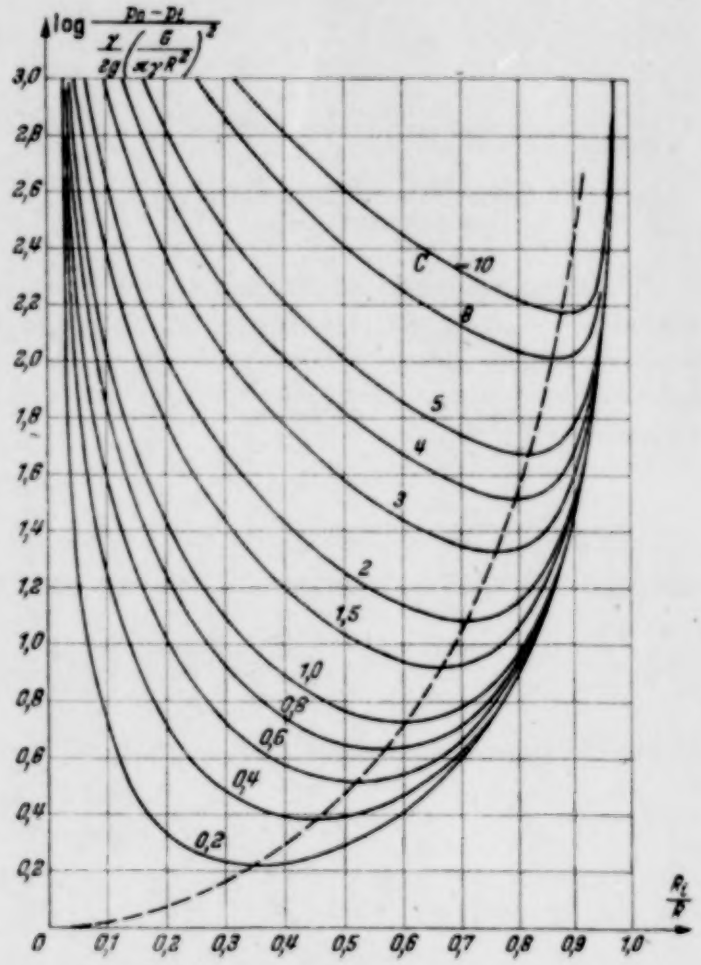

Abb. 27. Relatives Druckgefälle hinter einem radialen Leitrad.

Druckgradient vernachlässigbar klein ist (dies bedeutet axialkomponentenfreie Durchströmung des Leitrades), so muß am Austritt über die ganze Schaufelhöhe derselbe statische Druck, die gleiche Absolutgeschwindigkeit und bei beliebig vielen unverwundenen Schaufeln auch überall dieselbe Umfangsgeschwindigkeit herrschen. Die Strömung ist also wirbelfrei; im schaufellosen Raum bleibt sie das auch weiterhin. In der Ebene EF hat man es also mit einer zylindrischen wirbelfreien Drallströmung zu tun. Hier gelten daher die Betrachtungen, die wir früher für die wirbelfreie Strömung im schaufellosen Raum hinter einem axialen drallverwundenen Leitrad angestellt haben, unverändert. Diese Strömung war durch den Austrittswinkel α_{1R} des Leitrades und den Austrittsinnenhalbmesser R_{1i} gekennzeichnet. An die Stelle dieser Werte müssen jetzt die Daten des drallerzeugenden radialen Leitrades treten.

Beim Austritt aus dem Leitrad ist der Strömungswinkel α_1 und damit das Verhältnis Radial- zu Umfangsgeschwindigkeit gegeben. Bei bekannter Durchflußmenge G und Austrittsfläche $2\pi R_1 h$ ergibt sich die Radialgeschwindigkeit c_{r1} und damit die an dieser Stelle auftretende Umfangsgeschwindigkeit c_{u1}. Mit Hilfe des Drallsatzes läßt sich die Verteilung der Umfangsgeschwindigkeit in der Ebene EF berechnen. Die Axialgeschwindigkeit ist dort durch die durchströmte Fläche gegeben. Der auf Grund dieser Überlegungen berechnete Wert des relativen Druckgefälles ist in Abhängigkeit vom Halbmesserverhältnis R_i/R in Abb. 27 aufgetragen.

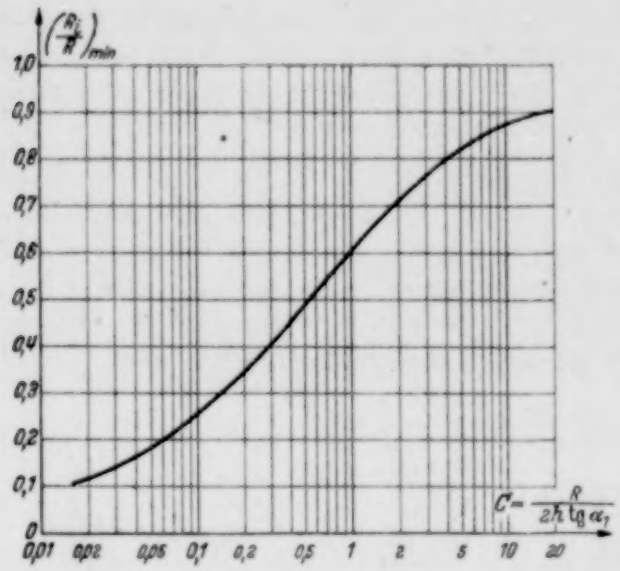

Abb. 28. Das Halbmesserverhältnis $(R_i/R)_{min}$ in Abhängigkeit von der Drallkonstanten.

Als Parameter wurde die dimensionslose Größe $C = R/2h \operatorname{tg} \alpha_1$ gewählt, da das Ergebnis vom Schaufelaustrittshalbmesser R_1 völlig unabhängig ist. Die Rechnungen sind im nachfolgenden Abschnitt durchgeführt. Die gestrichelte Linie gibt den Verlauf der Minima dieser Kurven wieder.

Im Gegensatz zum axialen begrenzt das radiale Leitrad die durchströmende Menge nicht. Bei freiem Ablauf wird man sich also immer im Minimum der jeweiligen Kurve befinden, wenn keine Nabe oder Naben mit Halbmessern $R_n < R_{i\min}$ eingebaut sind. Für Naben mit Halbmessern $R_n > R_{i\min}$ bewegt man sich wieder auf dem rechten Ast. In Abb. 28 ist das Halbmesserverhältnis $(R_i/R)_{min}$ als Funktion der Drallkonstanten $C = R/2h \operatorname{tg} \alpha_1$ dargestellt.

7. Rechnungsgang. a) Strömung am Leitradaustritt. Im Leitrad ist der Strömungswinkel α_1 ($\operatorname{tg} \alpha_1 = c_{m1}/c_{u1}$) vorgegeben. Für alle Flüssigkeitsteilchen derselben Herkunft ist der Gesamtdruck p_0 gleich. Da weder Energie an das feststehende Leitrad abgegeben noch von ihm aufgenommen wird, ist p_0 auch hinter dem Leitrad noch konstant. Nach der *Bernoulli*schen Gleichung ist daher

$$\frac{p_0 - p_1}{\frac{\gamma}{2g}} = c_1^2 = c_{u1}^2 + c_{m1}^2 = \frac{c_{m1}^2}{\sin^2 \alpha_1}, \tag{1}$$

wobei p_1 der örtliche statische Druck ist. Aus den *Euler*schen Grundgleichungen folgt

$$\frac{1}{\frac{\gamma}{2g}} \frac{dp_1}{dr} = 2 \frac{c_{u1}^2}{r} = 2 \frac{c_{m1}^2}{r \operatorname{tg}^2 \alpha_1}. \tag{2}$$

Durch Differentiation erhält man aus (1)

$$-\frac{1}{\frac{\gamma}{2g}} \frac{dp_1}{dr} = \frac{1}{\sin^2 \alpha_1} \frac{dc_{m1}^2}{dr} - \frac{2 c_{m1}^2}{\sin^3 \alpha_1} \cos \alpha_1 \frac{d\alpha_1}{dr}, \tag{3}$$

aus (2) und (3) durch Addition

$$0 = \frac{1}{\sin^2 \alpha_1} \frac{dc_{m1}^2}{dr} + \frac{2}{r} \frac{c_{m1}^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha_1} - \frac{c_{m1}^2}{\sin^2 \alpha_1} \frac{2 \frac{d\alpha_1}{dr}}{\operatorname{tg} \alpha_1}$$

und nach einigen Umformungen

$$\frac{d \ln c_{m1}^2}{dr} + \cos^2 \alpha_1 \frac{d \ln r^2}{dr} - \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dr} = 0. \tag{4}$$

Im Strömungsmaschinenbau verwendet man nun entweder drallverwundene Schaufeln ($\operatorname{tg} \alpha_1 = \text{konst} \cdot r$) oder gerade Schaufeln ($d\alpha_1/dr = 0$).

α) Verwundene Schaufeln. Der Austrittswinkel α_1 beim Halbmesser r ergibt sich für die drallverwundene Schaufel aus dem Drallsatz zu

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{r}{R} \operatorname{tg} \alpha_{1R}, \tag{5}$$

wenn α_{1R} der Winkel am Außenrand der Schaufel ist. Gleichung (5) nach r differenziert ergibt

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dr} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{1R}}{R}$$

oder

$$\frac{d\alpha_1}{dr} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_{1R}}{R} \cos^2 \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{r} \cos^2 \alpha_1. \tag{6}$$

Der Wert (6) in (4) eingesetzt liefert

$$\frac{d\ln c_{m1}^2}{dr} + \cos^2\alpha_1 \frac{2}{r} - \cos^2\alpha_1 \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{r} \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{d\ln c_{m1}^2}{dr} = 0 \tag{7}$$

oder

$$c_{m1} = C\,, \tag{8}$$

wobei C eine Integrationskonstante ist. Sie ergibt sich aus der Durchflußmenge.

Nimmt die Strömung einen Ringraum mit den Halbmessern R und R_i ein, dann ist die Durchflußmenge

$$G = 2\pi\gamma \int_{R_i}^{R} c_{m1}\, r\, dr = \pi\gamma (R^2 - R_i^2)\, C\,.$$

Daraus erhält man

$$c_{m1} = \frac{G}{\pi\gamma R^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)^2}\,. \tag{9}$$

Aus (1) wird mit (5) und (9)

$$\frac{p_0 - p_1}{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2} = \frac{1 + \frac{1}{\left(\frac{r}{R}\right)^2 \operatorname{tg}^2\alpha_{1R}}}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]^2}\,, \tag{10}$$

und für $r = R_i$ (Trennfläche) ist das relative Druckgefälle

$$\frac{p_0 - p_i}{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2} = \frac{1 + \frac{1}{\left(\frac{R_i}{R}\right)^2 \operatorname{tg}^2\alpha_{1R}}}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]^2}\,. \tag{11}$$

Gleichung (11) ist in Abb. 4 ausgewertet. Leitet man (11) nach R_i ab und setzt den Differentialquotienten gleich Null, dann erhält man die Gleichung zur Berechnung der Minima der einzelnen Kurven. Nach einigen Umformungen lautet sie

$$\left(\frac{R_i}{R}\right)^2_{\min} = -0{,}75\operatorname{ctg}^2\alpha_{1R} + \operatorname{ctg}\alpha_{1R}\,\Big]\!\Big/\, 0{,}5625\operatorname{ctg}^2\alpha_{1R} + 0{,}5\,. \tag{12}$$

β) Gerade Schaufeln. Setzt man in (4) $\frac{d\alpha_1}{dr} = 0$, dann erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{d\ln c_{m1}^2}{dr} + \cos^2\alpha_1 \frac{d\ln r^2}{dr} = 0 \tag{13}$$

und integriert

$$c_{m1} = \frac{C_1}{r^{\cos^2\alpha_1}}\,. \tag{14}$$

Die Integrationskonstante C_1 ergibt sich wieder aus der Durchflußmenge. Es ist

$$G = 2\pi\gamma \int_{R_i}^{R} c_{m1}\, r\, dr = 2\pi\gamma\, C_1 \int_{R_i}^{R} r^{\sin^2\alpha_1}\, dr = \frac{2\pi\gamma\, C_1}{1+\sin^2\alpha_1} \left(R^{1+\sin^2\alpha_1} - R_i^{1+\sin^2\alpha_1}\right),$$

und daraus erhält man

$$C_1 = \frac{G}{\pi\gamma R^2} \frac{1+\sin^2\alpha_1}{2} R^{\cos^2\alpha_1} \frac{1}{1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)^{1+\sin^2\alpha_1}}$$

bzw.

$$c_{m1} = \frac{G}{\pi\gamma R^2} \frac{1+\sin^2\alpha_1}{2} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)^{1+\sin^2\alpha_1}\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\cos^2\alpha_1}}\,. \tag{15}$$

Der Wert (15) in (1) eingesetzt ergibt

$$\frac{p_0 - p_1}{\frac{\gamma}{2g}} = \left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2 \frac{(1+\sin^2\alpha_1)^2}{4\sin^2\alpha_1} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)^{1+\sin^2\alpha_1}\right]^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{2\cos^2\alpha_1}}$$

oder

$$\frac{p_0 - p_1}{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2} = \frac{(1+\sin^2\alpha_1)^2}{4\sin^2\alpha_1} \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)^{1+\sin^2\alpha_1}\right]^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{2\cos^2\alpha_1}}\,. \tag{16}$$

Für den Innenrand der Strömung ($r = R_i$) erhält man wieder das relative Druckgefälle

$$\frac{p_0 - p_i}{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi \gamma R^2}\right)^2} = \frac{(1+\sin^2\alpha_1)^2}{4\sin^2\alpha_1} \cdot \frac{1}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R}\right)^{1+\sin^2\alpha_1}\right]^2 \left(\frac{R_i}{R}\right)^{2\cos^2\alpha_1}} . \tag{17}$$

Gleichung (17) ist in Abb. 5 ausgewertet. Um die Kleinstwerte berechnen zu können, ergibt die nach R_i abgeleitete und gleich Null gesetzte Gleichung (17) schließlich

$$\left(\frac{R_i}{R}\right)_{\min} = \left(\frac{\cos^2\alpha_1}{2}\right)^{\frac{1}{2-\cos^2\alpha_1}} . \tag{18}$$

b) Strömung im schaufellosen Raum. Hat die Flüssigkeit das Leitrad verlassen, so fällt die Führung durch die Schaufeln fort, und der Strömungswinkel kann sich ändern. Dagegen muß der Drall der einzelnen Flüssigkeitsteilchen erhalten und die Kontinuität gewahrt bleiben. Nehmen wir an, ein Teilchen habe das Leitrad auf dem Halbmesser r_1 verlassen und befinde sich jetzt auf dem Halbmesser r, ferner habe es die Geschwindigkeitskomponenten c_m und $c_u = c_m \operatorname{ctg}\alpha$, dann verlangt der Drallsatz

$$r_1 c_{u1} = r_1 c_{m1} \operatorname{ctg}\alpha_1 = r c_u = r c_m \operatorname{ctg}\alpha . \tag{19}$$

Aus Kontinuitätsgründen muß ferner

$$c_{m1} r_1 \, dr_1 = c_m r \, dr \tag{20}$$

sein. Da der neue Halbmesser eine Funktion des Achsenabstandes, unter dem das Teilchen das Leitrad verlassen hat, sein wird, darf man

$$\frac{dr}{dr_1} = \frac{c_{m1} r_1}{c_m r}$$

setzen. Damit erhält man

$$\frac{p_0 - p}{\frac{\gamma}{2g}} = c_u^2 + c_m^2 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 c_{u1}^2 + \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \left(\frac{dr_1}{dr}\right)^2 c_{m1}^2 = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \left[\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha_1} + \frac{1}{\left(\frac{dr}{dr_1}\right)^2}\right] c_{m1}^2 .$$

Mit (1) wird

$$\frac{p_0 - p}{\frac{\gamma}{2g}} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{1 + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha_1}{\left(\frac{dr}{dr_1}\right)^2}}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1} \frac{p_0 - p_1}{\frac{\gamma}{2g}}$$

oder

$$\frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{1 + \frac{\operatorname{tg}^2\alpha_1}{\left(\frac{dr}{dr_1}\right)^2}}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1} . \tag{21}$$

Um (21) auszuwerten, ist noch die Beziehung zwischen dr/dr_1 und r herzuleiten.

Aus (4) erhält man durch Umformen (an die Stelle von r tritt r_1, da es sich um die Austrittskoordinate aus dem Leitrad handelt)

$$\frac{d}{dr_1} \ln\left(\frac{r_1 c_{m1}}{\operatorname{tg}\alpha_1}\right)^2 = 2\sin^2\alpha_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{\frac{d\alpha_1}{dr_1}}{\sin\alpha_1 \cos\alpha_1}\right) . \tag{22}$$

Diese Gleichung gilt auch für die Strömung im schaufellosen Raum, also ist

$$\frac{d}{dr} \ln\left(\frac{r c_m}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = 2\sin^2\alpha \left(\frac{1}{r} - \frac{\frac{d\alpha}{dr}}{\sin\alpha\cos\alpha}\right) \tag{23}$$

und nach Multiplikation mit dr/dr_1

$$\frac{d}{dr_1} \ln\left(\frac{r c_m}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 = 2\sin^2\alpha \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dr_1} - \frac{\frac{d\alpha}{dr_1}}{\sin\alpha\cos\alpha}\right) . \tag{24}$$

Subtrahiert man (24) von (22) und berücksichtigt (19), dann erhält man

$$\sin^2\alpha_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{\frac{d\alpha_1}{dr_1}}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1}\right) - \sin^2\alpha \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dr_1} - \frac{\frac{d\alpha}{dr_1}}{\sin\alpha\cos\alpha}\right) = 0 . \tag{25}$$

Nun ist nach (19) und (20)

$$\operatorname{tg}\alpha_1\, dr_1 = \operatorname{tg}\alpha\, dr\,, \tag{26}$$

und aus (26) wird

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{\left(\frac{dr}{dr_1}\right)^2}{\operatorname{tg}^2\alpha_1}\,. \tag{27}$$

Für den Ausdruck $\frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{dr_1}$ erhält man unter Hinzuziehung von (26)

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}\,\frac{d\alpha}{dr_1} = \frac{d}{dr_1}(\operatorname{tg}\alpha) = \frac{d}{dr_1}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\frac{dr}{dr_1}}\right) = \frac{1}{\frac{dr}{dr_1}}\,\frac{1}{\cos^2\alpha_1}\,\frac{d\alpha_1}{dr_1} - \operatorname{tg}\alpha_1\,\frac{1}{\left(\frac{dr}{dr_1}\right)^2}\,\frac{d^2r}{dr_1^2}\,.$$

Multipliziert man die linke Seite dieser Gleichung mit $1/\operatorname{tg}\alpha$ und die rechte Seite mit dem nach (26) gleichen Wert $1/\frac{dr_1}{dr}\operatorname{tg}\alpha_1$, so wird

$$\frac{\frac{d\alpha}{dr_1}}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\frac{d\alpha_1}{dr_1}}{\sin\alpha_1\cos\alpha_1} - \frac{d}{dr_1}\ln\left(\frac{dr}{dr_1}\right). \tag{28}$$

Mit (27) und (28) erhält man aus (25) nach einigen Umformungen

$$\frac{d}{dr_1}\ln\frac{r}{r_1}\,\frac{dr}{dr_1} = -\cos^2\alpha_1\left[1-\left(\frac{dr}{dr_1}\right)^2\right]\frac{d}{dr_1}\ln\frac{r_1}{\operatorname{tg}\alpha_1}\,. \tag{29}$$

Wir wollen nun (29) auf die Strömung im schaufellosen Raum hinter drallverwundenen und geraden Leitradschaufeln anwenden.

α) Strömung hinter verwundenen Schaufeln. Da bei verwundenen Schaufeln $\operatorname{tg}\alpha_1 = (r_1/R)\operatorname{tg}\alpha_{1R}$ und damit $\frac{r_1/R}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \text{konst}$ ist, wird die rechte Seite von (29) gleich Null. Damit wird

$$\frac{r}{r_1}\,\frac{dr}{dr_1} = \text{konst.}$$

Da für $r_1 = R$ auch $r = R$ ist, erhält man somit

$$\frac{r}{r_1}\,\frac{dr}{dr_1} = \frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-\left(\frac{r_1}{R}\right)^2} = \text{konst.}$$

oder

$$\frac{dr}{dr_1} = \frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1-\left(\frac{r_1}{R}\right)^2}\,\frac{\frac{r_1}{R}}{\frac{r}{R}}\,. \tag{30}$$

Mit (30) haben wir die gesuchte Beziehung zwischen dr/dr_1 und r. Diese in (21) eingeführt und für $\operatorname{tg}\alpha_1 = (r_1/R)\operatorname{tg}\alpha_{1R}$ gesetzt, ergibt schließlich

$$\frac{p_0-p}{p_0-p_1} = \frac{\left(\frac{r_1}{R}\right)^2}{\left(\frac{r}{R}\right)^2}\,\frac{1+\frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2\left[1-\left(\frac{r_1}{R}\right)^2\right]^2\operatorname{tg}^2\alpha_{1R}}{\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^2}}{1+\left(\frac{r_1}{R}\right)^2\operatorname{tg}^2\alpha_{1R}}\,. \tag{31}$$

Für $r_1 = R_{1i}$ wird $r = R_i$ und man erhält

$$\frac{p_0-p_i}{p-p_{1i}} = \frac{\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^2}{\left(\frac{R_i}{R}\right)^2}\,\frac{1+\frac{\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\left[1-\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^2\right]^2\operatorname{tg}^2\alpha_{1R}}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]^2}}{1+\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^2\operatorname{tg}^2\alpha_{1R}}\,.$$

In Verbindung mit (11), in der hier an Stelle von p_i und R_i die Größen p_{1i} und R_{1i} zu setzen sind, ergibt sich nunmehr

$$\frac{p_0-p_i}{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2} = \frac{1}{\left[1-\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^2\right]^2\operatorname{tg}^2\alpha_{1R}}\,\frac{1}{\left(\frac{R_i}{R}\right)^2} + \frac{1}{\left[1-\left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]^2}\,. \tag{32}$$

Nach dieser Gleichung wurden die Kurven in Abb. 10 und 12 berechnet.

Der im Text behandelte kritische Halbmesser $R_{1i\,\mathrm{krit}}$ ist dadurch gekennzeichnet, daß für $R_i = R_{1i}$

$$\left\{\frac{d}{d\,R_i}\left[\frac{p_0 - p_i}{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2}\right]\right\}_{R_i = R_{1i}} = 0$$

ist. Daraus ergibt sich

$$\frac{1 - \left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^2_{\mathrm{krit}}}{\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^4_{\mathrm{krit}}} = 2\,\mathrm{tg}^2\alpha_{1R}. \tag{33}$$

Nach (33) wurde die betreffende Kurve von Abb. 14 berechnet.

β) Strömung hinter geraden Schaufeln. Da bei geraden Schaufeln $\alpha_1 = \mathrm{konst}$ ist, wird aus (29)

$$\frac{d}{dr_1}\ln\frac{r}{r_1}\frac{dr}{dr_1} = -\cos^2\alpha_1\left[1 - \left(\frac{dr}{dr_1}\right)^2\right]\frac{d}{dr_1}\ln r_1. \tag{34}$$

Diese Gleichung ist in geschlossener Form nicht integrierbar. Für die numerische Auswertung geht man vom Wert $r_1 = R$ aus. Da sich der Außenhalbmesser nicht ändern soll, ist hier auch $r = R$. Gibt man an dieser Stelle dr/dr_1 vor, so läßt sich durch schrittweise Integration für jedes r_1 das zugehörige r und der Differentialquotient dr/dr_1 berechnen. Setzt man die für $r_1 = R_{1i}$ erhaltenen Werte in (21) ein, so erhält man den Wert für $(p_0 - p_i)/(p_0 - p_{1i})$ und daraus in Verbindung mit (17), worin wieder an Stelle von p_i und R_i die Größen p_{1i} und R_{1i} zu setzen sind, das relative Druckgefälle $(p_0 - p_i)/\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2$. Auf diese Art wurden die Kurven der Abb. 11 und 13 bestimmt.

Wenn man in Gleichung (26), die wir hier in der Form $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha_1/\frac{dr}{dr_1}$ schreiben wollen, die aus dem geschilderten Rechnungsgang erhaltenen Werte dr/dr_1 einsetzt, erhält man beispielsweise die in Zahlentafel 2 für $\alpha_1 = 24°$ und $R_{1i}/R = 0{,}5$ und in Abb. 25 für $\alpha_1 = 25°$ und $R_{1i}/R = 0{,}6$ aufgeführten Strömungswinkel α.

Der kritische Halbmesser $R_{1i\,\mathrm{krit}}$ ist auch hier wieder dadurch gekennzeichnet, daß die von Punkt R_{1i} ausgehende $(p_0 - p_i)/\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2$-Kurve an dieser Stelle ($R_i = R_{1i}$) ihr Minimum hat. Da ein geschlossener Ausdruck für das relative Druckgefälle dieses Mal nicht vorliegt, ist eine einfache Differentiation nicht möglich. In der Nähe des Ausgangspunktes indessen unterscheiden sich sowohl R_i und R_{1i} als auch sämtliche anderen r und r_1 nur wenig voneinander. Setzt man

$$r = r_1 + \varepsilon,$$

so ist ε eine kleine Größe, deren höhere Potenzen vernachlässigt werden können. Aus (21) erhält man damit

$$\frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} = 1 - 2\frac{\varepsilon}{r_1}\left(1 + \sin^2\alpha_1\frac{d\,\varepsilon/dr_1}{\varepsilon/r_1}\right). \tag{35}$$

Aus (34) erhält man auf demselben Wege die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varepsilon}{dr_1^2} + (1 - 2\cos^2\alpha_1)\frac{1}{r_1}\frac{d\varepsilon}{dr_1} - \frac{\varepsilon}{r_1^2} = 0. \tag{36}$$

Mit dem Ansatz

$$\varepsilon = C r_1^n$$

integriert sich die Gleichung (36), wenn man die Randbedingungen $\varepsilon = 0$ für $r_1 = R$ berücksichtigt, zu

$$\varepsilon = \varepsilon_0\left[\left(\frac{r_1}{R}\right)^{n_1} - \left(\frac{r_1}{R}\right)^{n_2}\right],$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= \cos^2\alpha_1 + \sqrt{1 + \cos^4\alpha_1}, \\ n_2 &= \cos^2\alpha_1 - \sqrt{1 + \cos^4\alpha_1} \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

ist. Weiter ergibt sich

$$\frac{d\,\varepsilon}{dr_1} = \frac{\varepsilon_0}{r_1}\left[n_1\left(\frac{r_1}{R}\right)^{n_1} - n_2\left(\frac{r_1}{R}\right)^{n_2}\right].$$

Durch Einsetzen in (35) erhält man

$$\frac{p_0 - p}{p_0 - p_1} = 1 - 2\cos^2\alpha_1 \frac{\varepsilon}{r_1}\left[1 + \sin^2\alpha_1 \frac{n_1\left(\frac{r_1}{R}\right)^{n_1} - n_2\left(\frac{r_1}{R}\right)^{n_2}}{\left(\frac{r_1}{R}\right)^{n_1} - \left(\frac{r_1}{R}\right)^{n_2}}\right]$$

bzw. für $r_1 = R_{1i}$

$$\frac{p_0 - p_i}{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2} = \frac{p_0 - p_{1i}}{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2}\left\{1 - 2\cos^2\alpha_1 \frac{\varepsilon}{R_{1i}}\left[1 + \sin^2\alpha_1 \frac{n_1\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^{n_1} - n_2\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^{n_2}}{\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^{n_1} - \left(\frac{R_{1i}}{R}\right)^{n_2}}\right]\right\}.$$

Man sieht sofort, daß die erste Ableitung dieses Ausdruckes nach R_i bzw., was damit identisch ist, nach ε nur Null sein kann, wenn

$$1 + \sin^2\alpha_1 \frac{n_1\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)_{krit}^{n_1} - n_2\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)_{krit}^{n_2}}{\left(\frac{R_{1i}}{R}\right)_{krit}^{n_1} - \left(\frac{R_{1i}}{R}\right)_{krit}^{n_2}} = 0 \tag{38}$$

ist. Nach (37) und (38) wurde die entsprechende Kurve in Abb. 14 berechnet.

c) Strömung hinter einem radialen Leitrad. Beim radialen Leitrad ist die durchströmende Menge

$$G = 2\pi\gamma R_1 h c_{u1} \operatorname{tg}\alpha_1 . \tag{39}$$

Außerdem ist für zylindrische Strömung im Saugrohr

$$G = \pi\gamma(R^2 - R_i^2) c_m . \tag{40}$$

Ferner ist nach dem Drallsatz die Umfangsgeschwindigkeit am Innenhalbmesser der Strömung

$$c_{ui} = c_{u1}\frac{R_1}{R_i} . \tag{41}$$

Setzt man (39), (40) und (41) in (1) ein, dann erhält man für den Innenrand der Strömung, wo $c_1^2 = c_{ui}^2 + c_m^2$ ist, das relative Druckgefälle

$$\frac{p_0 - p_i}{\frac{\gamma}{2g}\left(\frac{G}{\pi\gamma R^2}\right)^2} = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)^2\right]^2} + \left(\frac{R}{2h\operatorname{tg}\alpha_1}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{R_i}{R}\right)^2} . \tag{42}$$

Die aus dieser Gleichung berechneten Werte sind in Abb. 27 dargestellt; hierbei ist $R/2h \operatorname{tg}\alpha_1 = C$ gesetzt.

Die Minimalwerte erhält man aus

$$\frac{\left(\frac{R_i}{R}\right)_{min}^4}{\left[1 - \left(\frac{R_i}{R}\right)_{min}^2\right]^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{2h\operatorname{tg}\alpha_1}\right)^2; \tag{43}$$

sie sind in Abb. 27 durch die gestrichelte Kurve wiedergegeben. Abb. 28 zeigt $(R_i/R)_{min}$ in Abhängigkeit von der Drallkonstanten $C = R/2h \operatorname{tg}\alpha_1$.

8. Der Einfluß der Reibung. Die Behandlung der Strömung reibungsfreier Flüssigkeiten ist deshalb wichtig, weil man dadurch eine Näherungslösung für das Verhalten wirklicher Flüssigkeiten gewinnt. Wir wollen im folgenden untersuchen, wie die bisher gewonnenen Ergebnisse für wirkliche Flüssigkeiten zu korrigieren sind. Die Reibung wird sich im wesentlichen an zwei Stellen bemerkbar machen, nämlich einmal an der Grenze der Strömung zur festen Außenwand, das zweite Mal an der Trennfläche zum Kern.

An der Gehäusewand bildet sich eine Grenzschicht aus, in der die Geschwindigkeit auf Null absinkt. Durch diese Grenzschicht wird die Strömung von der Wand abgedrängt, was einer Verkleinerung des Außendurchmessers gleichkommt. Der Betrag dieser Verengung, die sogenannte Verdrängungsdicke der Grenzschicht, nimmt in axialer Richtung dauernd zu. Das wirkt sich auch auf die Ausbildung des Kernes aus. Es läßt sich zeigen, daß in einem zylindrischen Rohr hinter dem Leitrad ein schwach kegelförmig zur Austrittsseite offener Kern auftreten müßte[1]. Aber der Einfluß der Reibung an der Außenwand auf die Ausbildung des Kernes wird klein sein gegenüber der unmittelbaren Einwirkung der Reibung an der Trennfläche „Strömung – Kern".

[1] Ein ähnlicher Fall wurde bereits behandelt von *K. Bammert* und *J. Schoen*. Z. VDI. 90 (1948) S. 81.

In reibungsbehafteter Flüssigkeit ist eine sprunghafte Änderung der Geschwindigkeit am Übergang von der Strömung zum Kern nicht möglich; eine Trennfläche der bisher behandelten Art wird also nicht auftreten. Es kann sich natürlich auch bei der reibungsbehafteten Flüssigkeit ein Nabentotwasser ausbilden, doch ist dieses nicht mehr in Ruhe. Unmittelbar an der Trennfläche müssen die zur Strömung bzw. zum Kern gehörenden Teilchen dieselbe Geschwindigkeit (nach Größe und Richtung) haben. Allerdings findet im Kern ein eigentlicher Massentransport nicht statt; die den Kern bildende Flüssigkeit wird nur innerhalb des Totwassergebietes umgewälzt, wenn man von dem durch Diffusion und Turbulenz bedingten Stoffaustausch absieht. Die hier behandelte Drallströmung hat axiale und tangentiale Geschwindigkeitskomponenten. Der Einfluß beider auf die Ausbildung des Kernes soll getrennt untersucht werden.

Unter dem Einfluß der Tangentialkomponente muß der Kern mitrotieren, und zwar würde er bei fehlender Nabe und ohne Axialbewegung einfach wie ein starrer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit der innersten Strömungsschicht umlaufen. Die Nabe und die im Kern vorhandenen Axial- und Radialgeschwindigkeiten lassen zwar eine völlig starre Rotation nicht zu, doch wird man angenähert mit einer solchen rechnen können. Es zeigt sich dabei, daß je nach Größe der Nabe sowohl eine Vergrößerung wie auch eine Verkleinerung des Kernes eintreten kann. Beide Erscheinungen sind aber klein gegenüber der Reibungswirkung der Axialkomponente der Strömung.

Die Axialgeschwindigkeit wird unter dem Einfluß der Reibung in der Trennfläche Zugkräfte in Richtung der Strömung auf den Kern ausüben. Besteht dieser nicht aus einer festen Nabe, sondern aus Totwasser, so muß sich darin ein der Strömung entgegengerichtetes Druckgefälle einstellen. Damit wird auch in der Grenzfläche „Kern – Strömung" der Druck in Strömungsrichtung zunehmen.

Da das radiale Leitrad den Durchfluß nicht begrenzt, ist dieser Fall verhältnismäßig einfach zu übersehen. Die durchtretende Menge wird durch das Saugrohr (Abb. 26) bestimmt. In diesem muß also an irgendeiner Stelle die Strömung dem Minimum der Druckgefällekurve entsprechen. Das kann aber nur da der Fall sein, wo bei gleichbleibender Durchflußmenge und gleichbleibendem Außenhalbmesser der Druck p_i in der Trennfläche einen Höchstwert erreicht, also am Ende des Rohres. Überall vorher muß die Strömung dem linken Ast der Kurve entsprechen, d. h. der Kern muß hier überall kleiner sein als bei einer reibungsfreien Flüssigkeit. Man gelangt auch zum gleichen Ergebnis, wenn man bedenkt, daß der Unterdruck in der Strömung ja gerade darauf beruht, daß Teile des Totwassers von der Strömung mit fortgerissen werden.

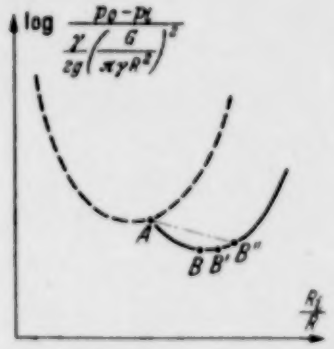

Abb. 29. Austritt aus einem axialen Leitrad bei Reibung.

Ist eine Nabe vorhanden, die so groß ist, daß in reibungsfreier Flüssigkeit zwischen ihr und der Strömung nur noch ein kleiner Raum bleibt, in dem sich Totwasser bilden könnte, so kann dieses, wie beim Diffusor, in reibungsbehafteter Flüssigkeit völlig fortgespült werden. Im Gegensatz zum Diffusor muß aber vor dem Austritt aus dem Saugrohr Ablösung erfolgen, da sonst der Wiederanstieg des Innendruckes p_i auf den Gegendruck p_a nicht möglich ist.

Schwieriger liegen die Verhältnisse beim axialen Leitrad. Abb. 29 stellt noch einmal das Durchflußdiagramm dar; dabei ist die Leitradkurve gestrichelt und die Kurve für den schaufellosen Raum ausgezogen. Die Strömung soll das Leitrad im Punkt A verlassen. Dann wird sie, da am Rande des Kernes ein stetiger Wiederanstieg des Druckes p_i erfolgt, etwa auf dem strichpunktierten Linienzug $A\,B'\,B''$ verlaufen. Wahrscheinlich wird aber in reibungsbehafteter Strömung der Druck an der Trennfläche so weit absinken, daß der Punkt B'' mit dem im Minimum der Kurve gelegenen Punkt B zusammenfällt. Die durchtretende Menge wird dann nicht vom Leitrad, sondern vom Ende des Abströmraumes vorgegeben. Dann verläuft die Strömung im schaufellosen Raum nicht auf dem rechten, sondern auf dem linken Ast der ausgezogenen Kurve; also nicht auf dem Kurvenzug $A\,B'\,B$, sondern auf dem Kurvenstück $A\,B$ unmittelbar. In diesem Fall wird sich also der Kern hinter dem Leitrad fortlaufend vergrößern. Die Versuche scheinen dies zu bestätigen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

Dem hier geschilderten Druckanstieg am Innenrand der Strömung entspricht ein ähnlicher an der Nabe. Man kann so weit gehen und sagen, daß dort, wo ein Druckanstieg an der Nabe entgegen der Strömungsrichtung festgestellt wurde, Nabentotwasser aufgetreten sein muß.

9. Vergleich mit Leitradversuchen. Messungen an axialen und radialen Leiträdern für axial beaufschlagte Laufräder sind von mehreren Verfassern bekannt. *W. Hartmann* und *G. Korbacher* haben in neuerer Zeit Versuche an axialen Leiträdern und *E. Meldau* an einem radialen Leitrad durchgeführt. Die in den Rahmen der hier behandelten Aufgabe fallenden Versuchsergebnisse sollen mit der Theorie verglichen werden.

a) Versuche an einem axialen Leitradgitter von *W. Hartmann*. In der Versuchsanordnung[1] war der Leitschaufelaustrittswinkel $\alpha_1 = 19°45'$ und das Nabenverhältnis $R_n/R = 0{,}73$. Die Schaufeln waren unverwunden. Mit diesen Daten war im Leitrad nicht mit Ablösung an der Nabe zu rechnen (siehe Abb. 6), jedoch in dem dahinterliegenden schaufellosen Raum (siehe Abb. 14).

Bei reibungsfreier Strömung müßte der Innendruck p_{1i} am Leitradaustritt gleich dem Gegendruck p_a sein, also $(p_0 - p_{1i})/(p_0 - p_a) = 1$. Bei reibungsbehafteter Strömung müßte nach unseren Überlegungen im vorigen Abschnitt p_{1i} dem Punkte A, p_a dem Punkte B der Abb. 29 entsprechen. Für die obengenannten Daten müßte danach $(p_0 - p_{1i})/(p_0 - p_a) = 1{,}14$ sein. Gemessen wurden bei mehreren Versuchen Werte zwischen 1,11 und 1,14. Die gemessenen Werte können daher als eine gute Bestätigung unserer Theorie betrachtet werden.

b) Versuche an einem axialen Leitapparatprüfstand von *G. Korbacher*. α) Versuchsanordnung. Einen Längsschnitt durch den Leitapparatprüfstand zeigt Abb. 30. Die Versuchseinrichtung[2] besteht im wesentlichen aus dem Einlauftrichter, dem axialen Leitrad

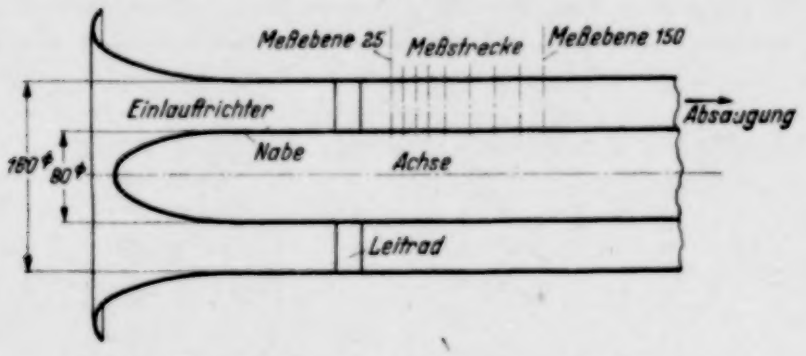

Abb. 30. Längsschnitt durch den Leitapparat-Prüfstand.

und der Meßstrecke. Um eine möglichst störungsfreie axiale Anströmung des Leitrades zu erzielen, wird die Luft aus dem Außenraum über das Leitradgitter angesaugt. Das Leitrad ist zwischen Außenrohr und Nabe eingebaut. Nach Abb. 30 ist das Nabenverhältnis $R_n/R = 0{,}5$. Die Schaufeln sind gerade; sie sind als *Parsons*-Profil 250 B bekannt. Der Schaufelaustrittswinkel beträgt 25° und das Teilungsverhältnis (mittlerer Schaufelabstand/Schaufellänge) ist 0,6. Die Meßstrecke dient zur Ausmessung der Strömung (Druck, Geschwindigkeit, Richtung) hinter dem Leitrad. Die einzelnen Meßebenen befinden sich in 25, 35, 45, 55, 70, 90, 110, 130 und 150 mm Abstand vom Leitradaustritt.

β) Das Nabentotwasser hinter dem Leitrad. Der gemessene Strömungswinkel in 25 mm Entfernung vom Leitradaustritt beträgt ebenso wie der mittlere Schaufelaustrittswinkel 25°. Wenn sich auch hier die Strömung noch nicht abgelöst hat, so hat doch die Grenzschicht an der Nabe eine gewisse Dicke erreicht. Dadurch werden die Stromlinien zusammengedrängt, was eine Vergrößerung der Axialgeschwindigkeit und damit auch des Strömungswinkels gegenüber dem in der Austrittsebene zur Folge hat. Der eigentliche Austrittswinkel der Strömung muß also etwas kleiner gewesen sein[3]. Er wird im folgenden zu $\alpha_1 = 24°$ angenommen. Damit

[1] Der Luftversuchsstand der Techn. Hochsch. Dresden, um den es sich hier handelt, ist in der in Fußnote 1 von S. 370 zitierten Arbeit eingehend beschrieben.

[2] Ausführlich beschrieben in der in Fußnote 2 von S. 367 zitierten Arbeit; vgl. auch *K. Bammert* und *G. Korbacher*, Die Technik 1 (1946) S. 233 und 295.

[3] Über die Verkleinerung des Strömungsaustrittswinkels gegenüber dem Schaufelaustrittswinkel vgl. etwa *J. Ackeret*, *C. Keller* und *F. Salzmann*, Schweiz. Bauztg. 104 (1936) S. 277 für ebene Gitter, und *K. Bammert* und *G. Korbacher*, Die Technik 1 (1946) S. 295 für rotationssymmetrische Gitter.

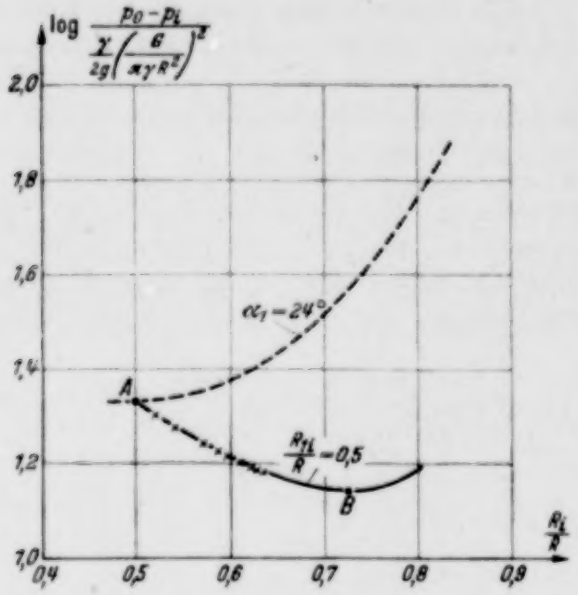

Abb. 31. Relativer Druckgefälle in und hinter dem Leitrad mit geraden Schaufeln ($\alpha_1=24°$ und $R_{1i}/R=0,5$).

ist bei dem vorliegenden Nabenverhältnis im Leitrad keine Ablösung zu erwarten. Im Abströmraum dahinter müßte sie allerdings einsetzen. Tatsächlich wurde sie in einiger Entfernung vom Leitrad festgestellt; es bildet sich dann ein merklicher Kern aus. Der Vorgang scheint sich folgendermaßen abzuspielen: Der durchflußbestimmende Querschnitt (Punkt *B* in Abb. 31) wird hinter der Meßstrecke liegen. Die ausgezogene Linie in Abb. 31 stellt die Austrittskurve für $\alpha_1 = 24°$ und $R_{1i}/R = 0{,}5$ dar. Geht man von *B* aus in der Strömung zurück, so wird der Innendruck p_i immer kleiner, während gleichzeitig der Kernhalbmesser abnimmt. Man bewegt sich auf dem Kurvenast *B*–*A*. Ist der Punkt *A* erreicht, dann liegt die Strömung an; sie ändert sich von hier aus bis zum Leitrad nicht mehr. Das scheint kurz hinter dem Leitradaustritt der Fall zu sein.

Zahlentafel 1.

Gemessene Strömungswinkel α und Staudrücke q hinter dem axialen Leitradgitter von Abb. 30.

Abstand der Meßebene vom Leitradaustritt [mm]	r [mm]	40	45	50	55	60	65	70	75	80
	r/R	0,500	0,563	0,625	0,688	0,750	0,812	0,875	0,937	1,000
25	α	2	25	25	25	25	25	25	25	25
	q	176	166,5	150,5	130	114	101	90,5		71
35	α	−0,5	26	26	26	26	26	26	26	26
	q	0	158,5	147,5	130	115,5	102	91		70,5
45	α	−1,5	27	27,5	27,5	27,5	27,5	27,5	27,5	27,5
	q	0	129,5	147	130,5	115	101,5	90		69,5
55	α	−3,5	17	27,5	28,5	28,5	28,5	28,5	28,5	28,5
	q	0	105	144	130	115	101,5	90,5		69
70	α	−6,5	16	25,5	28,5	29	29	29	29	29,5
	q	0	92	139	129,5	115	102	91,5		68,5
90	α	−10	14	24	28	29,5	29,5	29,5	30	30,5
	q	0	76	132	130	116	103,5	93,5		68,5
110	α	−12	11	21,5	28	30	30	30,5	31	31,5
	q	0	64	120	130	117,5	106	94		68,5
130	α	−14	9	20	27,5	30	30,5	31	31,5	32
	q	0	56,5	111	129	119	106,5	94		68
150	α	−15	8	19	27	30,5	31	31,5	32	32,5
	q	0	47	104	128	119	107	94		68

Hier liegen nun Messungen innerhalb der Strömung vor, und zwar wurden in den einzelnen Meßebenen der Staudruck q in mm Alkoholsäule und der Strömungswinkel α über den Querschnitt ermittelt. Die Meßwerte enthält Zahlentafel 1. Das dem Quadrat der Umfangsgeschwindigkeit (c_u^2) proportionale Produkt $q \cdot \cos^2\alpha$ ist in Abb. 32 über dem Halbmesser aufgetragen. Aus den gemessenen Strömungswinkeln einerseits und der c_u-Verteilung andererseits lassen sich die Kernhalbmesser in den einzelnen Meßebenen unabhängig voneinander bestimmen.

Aus früher Gesagtem ist bekannt, daß sich bei der Bildung des Kernes der Strömungswinkel ändern muß. Umgekehrt kann man natürlich auch aus der gemessenen Änderung des Strömungswinkels einen dieser Änderung entsprechenden Kern berechnen. Zahlentafel 2 enthält die Winkel α, die sich in der Strömung bei Änderung des Innenhalbmessers einstellen. Für $R_i/R = R_{1i}/R = 0{,}5$ ist überall $\alpha = \alpha_1 = 24°$. Nimmt der Kernhalbmesser den in der ersten Spalte angegebenen Wert an, so können aus der dritten Spalte die im Achsenabstand r/R (zweite Spalte) auftretenden Winkel α entnommen werden. Umgekehrt kann, wenn an einer Stelle der Achsenabstand und der Strömungswinkel gemessen wurden, mit Hilfe der Tafel das zugehörige R_i/R bestimmt werden. Die so für die verschiedenen Meßpunkte einer Ebene erhaltenen Werte wurden gemittelt. Die Mittelwerte der einzelnen Meßebenen ergeben den in Abb. 33, Kurve *a*, gezeigten Verlauf des Kernes.

Nun kann man noch ein anderes Verfahren zur Bestimmung des Kernhalbmessers heranziehen. Innerhalb der Strömung muß die Umfangsgeschwindigkeit vom Außenrand zur Nabe hin zunehmen, jedoch innerhalb des Kernes, der etwa mit konstanter Winkelgeschwindigkeit umläuft, in der gleichen Richtung abnehmen. Sie muß also an der Grenze „Strömung—Kern"

Zahlentafel 2.

Strömungswinkel hinter einem axialen Leitrad mit geraden Schaufeln bei $\alpha_1 = 24°$ und $R_{1i}/R = 0{,}5$.

$\frac{R_i}{R}$	$\alpha_1 = 24°$	
	r/R	α
0,545	1,000	26,32
	0,910	26,19
	0,819	26,08
	0,728	25,99
	0,637	25,96
	0,545	25,99
0,593	1,000	29,15
	0,920	28,86
	0,839	28,66
	0,757	28,48
	0,676	28,43
	0,593	28,49
0,642	1,000	32,46
	0,930	32,10
	0,859	31,85
	0,787	31,66
	0,714	31,58
	0,642	31,61
0,692	1,000	36,52
	0,940	36,21
	0,879	35,91
	0,817	35,65
	0,756	35,54
	0,692	35,65

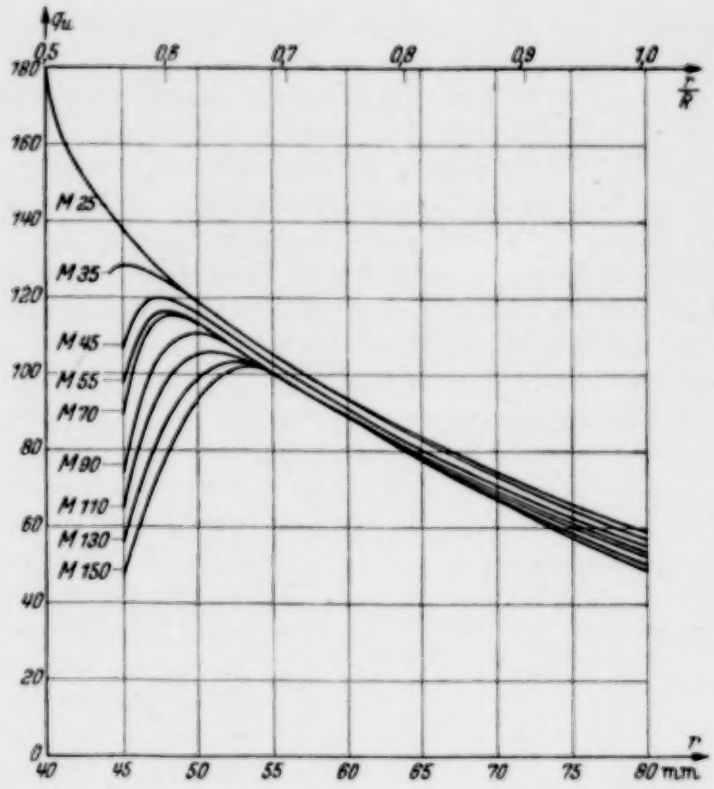

Abb. 32. Der Verlauf der Staudrücke der Umfangsgeschwindigkeiten über den Halbmessern in den verschiedenen Meßebenen.

einen Höchstwert erreichen. Die den Höchstwerten entsprechenden Halbmesserverhältnisse sind der Abb. 32 unmittelbar entnommen und in Abb. 33 aufgetragen (Kurve *b*). Zu dieser Art der Ermittlung der R_i/R-Werte ist noch folgendes zu bemerken: Zur Bestimmung der Halbmesserverhältnisse R_i/R werden hierbei ausschließlich die kernnächsten Schichten der Strömung herangezogen. In diesen macht sich natürlich der Einfluß der Reibung am stärksten bemerkbar, so daß die Umfangsgeschwindigkeiten hier schon merklich abgebaut werden. Bei wirklichen Flüssigkeiten werden also die Höchstwerte nicht an der eigentlichen Kerngrenze auftreten, sondern be-

reits in die Strömung hineinreichen. Damit wird man nach dieser Methode stets etwas zu hohe Werte erhalten (vgl. Kurve *a* und *b* in Abb. 33).

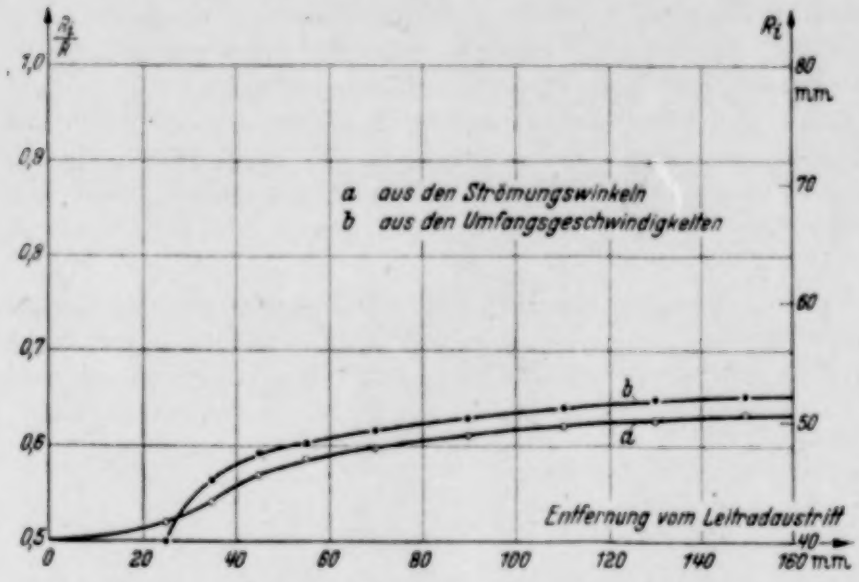

Abb. 33. Ausbildung des Nabentotwassers hinter dem Leitrad.

γ) Der Wiederanstieg des Druckes. Wie wir gesehen haben, bleibt der Druck p_i an der Grenze „Strömung — Kern" bei reibungsbehafteter Flüssigkeit nicht konstant, sondern nimmt entsprechend dem Kurvenzug AB (Abb. 31) zu. Der Druck in den Punkten A und B, also unmittelbar am Anfang und Ende des Kernes, wurde nicht gemessen. Bekannt ist aber der Druckverlauf in den dazwischenliegenden Meßebenen und damit an diesen Stellen der Druck am Rande des Kernes. Es genügt für den Vergleich zwischen Messung und Theorie, die beiden voneinander am weitesten entfernten Ebenen zu betrachten. Nach Zahlentafel 1 der in Fußnote 2 von Seite 367 zitierten Arbeit ergibt sich in der Meßebene $M\,25$ für $R_i/R = 0{,}52$ der Wert $(p_0 - p_i)_{25} = 192$ mm Alkoholsäule; in der Meßebene $M\,150$ war bei $R_i/R = 0{,}635$ der Wert $(p_0 - p_i)_{150} = 156$ mm AS. Daraus folgt $(p_0 - p_i)_{25}/(p_0 - p_i)_{150} = 1{,}23$, während nach Abb. 31 der Wert 1,32 zu erwarten gewesen wäre (die Lage der Kernhalbmesser der einzelnen Meßebenen ist in Abb. 31 auf der ausgezogenen Kurve durch kleine Kreuze markiert).

Bei unseren bisherigen Betrachtungen wurde der Abfall des Gesamtdruckes p_0 durch die Reibung nicht berücksichtigt. Tatsächlich tritt aber auch in der eigentlichen Strömung ein Unterschied zwischen dem örtlichen Gesamtdruck p_g und dem ursprünglichen Gesamtdruck p_0 auf. Er beträgt im Mittel 3 mm AS in Meßebene 25 und 10 mm AS in Meßebene 150. Berücksichtigt man das, so erhält man $(p_g - p_i)_{25}/(p_g - p_i)_{150} = 1{,}30$, ein Wert, der mit dem oben mitgeteilten theoretischen identisch ist.

Da am Außenrand des Kernes die Geschwindigkeit nach Größe und Richtung mit der der Strömung übereinstimmt, wird am Kernrand in diesem eine Axialgeschwindigkeit in Richtung der Strömung auftreten. Als Folge davon wird, da im ganzen im Kern kein Massentransport erfolgt, an der Nabe eine rückläufige Axialbewegung vorhanden sein müssen. Es werden sich also im Kern Ringwirbel nach Art der Abb. 34 ausbilden müssen. Als Folge davon wird der Druckanstieg an der Nabe anders verlaufen als am Kernrand. Zwischen den Meßebenen 25 und 150 zeigte sich im vorliegenden Versuch ein kleinerer Wiederanstieg als am Kernrand. Er beträgt an der Nabe 1,15.

Abb. 34. Rückströmung an der Nabe.

c) Versuche an einem radialen Leitradgitter von *E. Meldau*. *α*) Versuchsanordnung. Einen Schnitt durch den Versuchsstand[1] zeigt in schematischer Form Abb. 35. Das Wasser strömt durch die radialen Leitschaufeln, die in enger Teilung angebracht sind, um achsensymmetrische Strömung zu erzielen. Die Schaufeln können verstellt und damit der Drall der Strömung verändert werden. Hinter dem Leitrad wird das Wasser in axialer Richtung umgelenkt und gelangt in das zylindrische Saugrohr. An dessen Ende ist eine axial verstellbare Drosselplatte angebracht, mit deren Hilfe die durchfließende Wassermenge geändert wurde. Die Strömung wurde in mehreren Saugrohrebenen ausgemessen. Wir vergleichen unsere Rechnung mit den Messungen der in Abb. 35 eingezeichneten Meßebene.

β) Der Totwasserkern. Ähnlich wie bei unserer Auswertung der *Korbacher*schen Versuche können wir auch hier die Kernhalbmesser aus den gemessenen Strömungswinkeln bestimmen. Dies wurde für drei Versuche durchgeführt. Da die Strömungswinkel α_1 beim Austritt

[1] Siehe Fußnote 2 von S. 367.

Zahlentafel 3.

Auswertung von Strömungsversuchen hinter einem radialen Leitradgitter.

Versuch Nr.	I	II	III
α_1	52° 30′	36° 30′	20°
$C = R/2h \operatorname{tg} \alpha_1$	0,707	1,245	2,531
α_R	57° 30′	43° 50′	31° 20′
R_i/R	0,308	0,404	0,592
$(R_i/R)_{min}$	0,545	0,635	0,740
$\frac{(p_0-p_i)_{min}}{(p_0-p_i)_{wirkl.}}$	0,57	0,61	0,80

aus dem Leitrad über die Schaufelhöhe nicht konstant waren, wurde für die folgende Berechnung von jedem Versuch ein Mittelwert bestimmt, der in Zahlentafel 3 eingetragen ist. Genau so wie für axiale Leiträder lassen sich auch Beziehungen zwischen dem Kernhalbmesser und dem Strömungswinkel für das radiale Leitrad ableiten. Aus den Gleichungen (39), (40) und dem Drallsatz in der Form $c_{uR} R = c_{u1} R_1$ erhält man

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{c_m}{c_{uR}} = \frac{2h \operatorname{tg} \alpha_1}{R} \frac{1}{1-\left(\frac{R_i}{R}\right)^2} = \frac{1}{C} \frac{1}{1-\left(\frac{R_i}{R}\right)^2}. \tag{44}$$

Mit $\operatorname{tg} \alpha_1$ und den aus Abb. 35 ersichtlichen Konstruktionsdaten R und h werden die in Zahlentafel 3 aufgeführten Konstanten C erhalten. Aus der gemessenen Geschwindigkeitsverteilung kann nach der Beziehung

$$\operatorname{tg} \alpha_R = \frac{c_m}{c_u} \frac{r}{R} \tag{45}$$

der von der Randgrenzschicht unbeeinflußte Strömungswinkel α_R bestimmt werden. Daraus ergibt sich nach (44) das Verhältnis R_i/R. Die Werte sind in Zahlentafel 3 eingetragen. Damit lassen sich die theoretischen Axial- und Umfangsgeschwindigkeiten berechnen. Für den Ver-

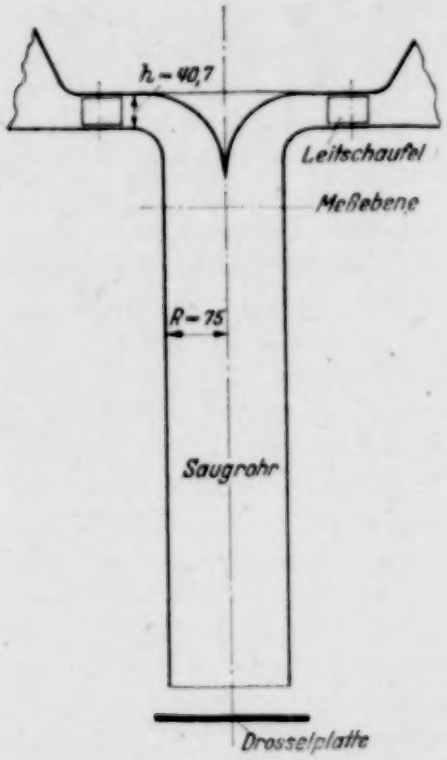

Abb. 35. Der Versuchsstand mit radialem Leitradgitter.

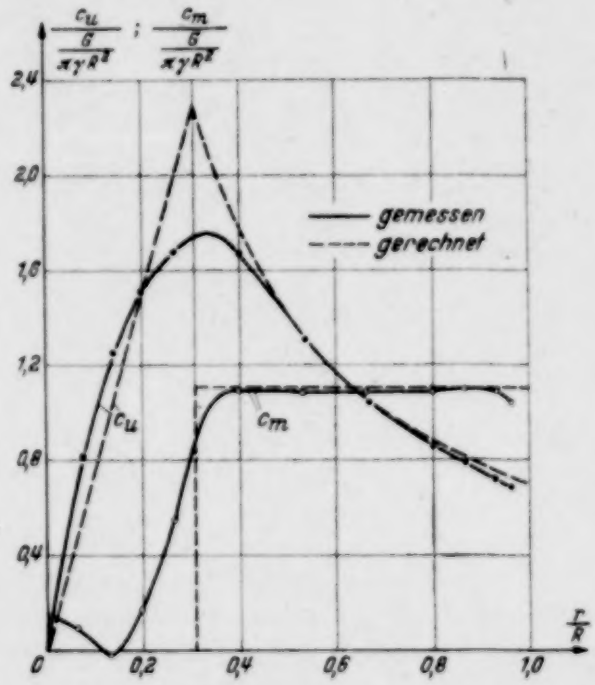

Abb. 36. Umfangs- und Axialgeschwindigkeiten in Abhängigkeit vom Halbmesserverhältnis bei Versuch I.

such I sind diese Werte gestrichelt in Abb. 36 eingetragen. Zum Vergleich zeigen die ausgezogenen Kurven die unmittelbar gemessenen Werte. Wie bei den Auswertungen der *Korbacher*schen Messungen stellt man auch hier fest, daß der Höchstwert der gemessenen Umfangsgeschwindigkeit gegenüber der aus den Winkeln berechneten Kerngrenze nach außen verschoben ist.

γ) **Der Einfluß der Drosselplatte.** Ohne Drosselplatte hätte sich bei reibungsfreier Flüssigkeit das Halbmesserverhältnis $(R_i/R)_{min}$ einstellen müssen. Diese aus Abb. 28 entnommenen Werte sind gleichfalls in Zahlentafel 3 eingetragen. Sie sind stets größer als die wirklichen Halbmesserverhältnisse. Die Strömung bewegt sich unter dem Einfluß der Drosselplatte immer auf den linken Ästen der Kurven für das relative Druckgefälle. Ein Maß für die Größe der Drosselwirkung ist das Verhältnis des tatsächlichen relativen Druckgefälles zu seinem Minimalwert. Dieses Verhältnis gibt an, um wieviel der Druckunterschied bei fehlender Drosselplatte kleiner sein könnte, um denselben Durchfluß zu erzielen. Das Verhältnis dieser beiden relativen Druckgefälle enthält Zahlentafel 3 ebenfalls.

10. Zusammenfassung. Unter Zugrundelegung einer reibungsfreien Flüssigkeit ließ sich eine Theorie entwickeln, um das Totwasser, das sich beim Durchströmen von axialen und radialen Leiträdern an der Nabe bilden kann, zu berechnen. Dehnt man die theoretischen Untersuchungen auf Drallströmungen bei wirklichen Flüssigkeiten aus, dann zeigt sich, daß die Rechnung mit reibungsfreier Flüssigkeit etwas zu große Totwasserabmessungen liefert. Der Vergleich mit bekannten Leitradversuchen bestätigt dies. Streng gelten diese Beziehungen für den freien Abfluß der Drallströmung, wo also hinter dem Leitradgitter kein Hindernis den Verlauf der Strömung stört. Hier kann das Auftreten und das Ausmaß des Nabentotwassers für beliebige Nabenverhältnisse und Strömungswinkel vorausbestimmt werden, eine Tatsache, die besonders geeignet ist, wenn Leitradgitter ausgelegt werden. Rechnet man dabei reibungsfrei, wie das ja auch bei Anwendung der *Bernoulli*schen Gleichung und des in der Praxis so sehr bewährten Drallsatzes der Fall ist, dann erhält man in guter Näherung den Verlauf der wirklichen Strömung.

(Eingegangen am 19. November 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Karl Bammert* (22a) Oberhausen-Sterkrade, Bahnhofstr. 66.

Zur Statik und Kinetik der Trägerroste.

Von S. Woinowsky-Krieger.

1. Einleitung. Bei neuzeitlichen Straßenbrücken werden immer häufiger lastverteilende Querträger verwendet, die zwar keine bedeutende Materialersparnis ermöglichen, wohl aber eine Reihe anderer wichtiger Vorteile bieten. Vor allen Dingen verteilen sich dabei die schwersten in Rechnung zu stellenden Fahrzeuge auf mehrere, statt nur auf die beiden nächsten Hauptträger. Auf diese Weise läßt sich eine nicht unwesentliche Verringerung der Brückenbauhöhe erzielen, besonders dann, wenn höhere mittragende Randhauptträger zur Verfügung stehen. Auch ist der hochgradig statisch unbestimmte Trägerrost wenig empfindlich gegen gelegentliche Überbeanspruchung einzelner Trägerquerschnitte; selbst örtliche Zerstörung eines Hauptträgers braucht den Bestand eines solchen Tragwerkes noch nicht unbedingt zu gefährden. Schließlich wird durch die kontinuierliche Bauweise der Querträger eine einwandfreie Aufnahme der an den Anschlüssen auftretenden Stützmomente gewährleistet, während die üblichen, zwar gelenkig gedachten, in der Ausführung aber meist steifen Anschlüsse in dieser Hinsicht wenig befriedigend sind.

Die exakte Berechnung von Trägerrosten mit vielen lastverteilenden Querträgern ist im allgemeinen eine recht mühsame Angelegenheit. Oft zieht man es deswegen vor, die Grundlagen für die Bemessung derartiger Trägersysteme sich auf dem Wege von Modellmessungen zu verschaffen[1]. Bei allen seinen Vorzügen kann ein solches Verfahren nie allgemein genug sein, um eine einigermaßen allgemein gehaltene Theorie vollständig zu ersetzen.

Das im folgenden entwickelte Näherungsverfahren ist auf zweiseitig gelagerte Trägerroste mit einer nicht sehr geringen Anzahl von lastverteilenden Querträgern anwendbar und liefert bei mäßigem Rechenaufwand die Schnittkräfte des Tragwerkes mit einer Genauigkeit, die in der Regel selbst für die endgültige Dimensionierung der Träger ausreichen dürfte. Will man auf eine strenge Berechnung des Trägerrostes dennoch nicht verzichten, so gibt die Näherungsmethode jedenfalls ein Mittel in die Hand, die zur Festlegung der Steifigkeitsverhältnisse doch notwendigen Vorberechnungen ohne viel Mühe durchzuführen.

Wir betrachten den in Abb. 1 dargestellten Trägerrost mit Hauptträgern im Abstande b und lastverteilenden Querträgern im Abstande a voneinander. Die x-Achse sei parallel zu den durch die Ordnungszahlen $k = 1, 2, 3, \ldots$ gekennzeichneten Hauptträgern gerichtet. Bezüglich der Beschaffenheit des Trägerrostes wollen wir die folgenden Annahmen treffen:

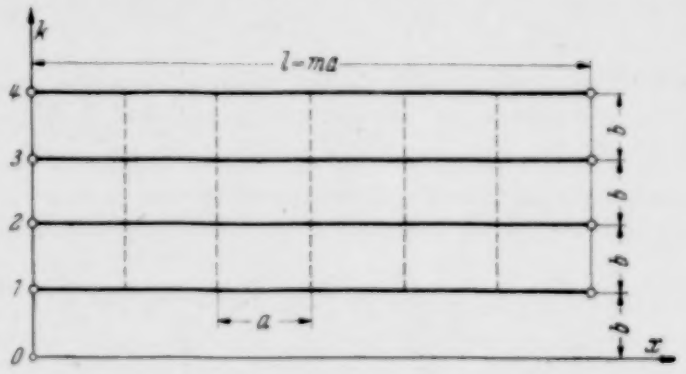

Abb. 1. Grundriß des Trägerrostes mit dem Koordinatensystem.

1. Die äußere Belastung greift ausschließlich an den Hauptträgern an. Dies kann auch mittelbar, beispielsweise durch gelenkig angeschlossene Zwischenquerträger geschehen, doch zählen diese letzteren jedenfalls nicht zum statischen System.

2. Die Eigenschwingungsformen der Hauptträger werden als bekannt vorausgesetzt.

3. Der Torsionswiderstand sämtlicher Träger des Rostes wird vernachlässigt.

4. Die Biegesteifigkeit der kontinuierlichen Querträger wird durch einen gleichförmig über der Hauptträgerlänge verteilten Biegewiderstand einer durchlaufenden drillungsfreien Platte ersetzt.

Wie ein Vergleich mit den Ergebnissen einer exakten Berechnung zeigt, erweist sich diese letzte, für die Begründung der Näherungstheorie überaus wesentliche Annahme bereits bei drei bis vier lastverteilenden Querträgern als praktisch berechtigt. Liegt hingegen ein Trägerrost mit ganz wenigen Querträgern (Felderzahl m = 2 oder 3) vor, so läßt sich das strenge Berechnungsverfahren so einfach gestalten, daß eine Näherungsmethode überhaupt nicht angebracht er-

[1] *F. Leonhardt*, Die vereinfachte Berechnung zweiseitig gelagerter Trägerroste. Berlin 1939.

scheint. Bildet übrigens die Fahrbahnplatte statisch einen Bestandteil der Trägergurtungen, so kann die unter 4) getroffene Annahme dem wirklichen Verhalten des Brückentragwerkes ebenso nahe kommen wie die Voraussetzungen der üblichen Trägerrosttheorie.

2. Grundgleichungen. Es sei EJ_k die als konstant vorausgesetzte Biegesteifigkeit eines Hauptträgers (k), $Y_k(x)$ seine Durchbiegung unter der gegebenen Belastung $P_k(x)$ und schließlich $M_k(x)$ das Biegungsmoment der lastverteilenden Platte über diesem Hauptträger. Liegt zunächst ein mittlerer Hauptträger vor, so kommen wir in Anbetracht der beiderseits dieses Trägers auftretenden Querkräfte der Platte zu der Differentialgleichung

$$EJ_k \frac{d^4 Y_k}{dx^4} = P_k + \frac{M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}}{b}. \tag{1}$$

Beim Randhauptträger kommen nur Querkräfte an der Innenseite des Trägers in Betracht. Für den Hauptträger $k = 1$ lautet also die Differentialgleichung

$$EJ_1 \frac{d^4 Y_1}{dx^4} = P_1 + \frac{M_2 - M_1}{b}. \tag{2}$$

Schließlich benutzen wir die für ein beliebiges x im Bereiche $0 \leqq x \leqq l$ gültige *Clapeyron*sche Gleichung von der Form

$$M_{k-1} + 4M_k + M_{k+1} = -\frac{6EJ_q m}{b^2 l}(Y_{k-1} - 2Y_k + Y_{k+1}), \tag{3}$$

worin J_q das Trägheitsmoment eines lastverteilenden Querträgers sein soll, so daß der Wert $J_q m/l$ die Biegesteifigkeit der gedachten lastverteilenden Platte je Längeneinheit des Hauptträgers repräsentiert. Mit $\varphi_n(x)$ sei noch die zum Schwingungsproblem des Hauptträgers (als Einzelsystem betrachtet) gehörige Eigenfunktion von der Ordnung n bezeichnet. Wir setzen dann

$$Y_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{kn} \varphi_n(x), \tag{4}$$

$$P_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{kn} \varphi_n(x), \tag{5}$$

$$M_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{kn} \varphi_n(x). \tag{6}$$

Die hierin enthaltenen Entwicklungsbeiwerte p_{kn} dürfen als bekannt gelten, so daß unsere weitere Aufgabe im wesentlichen auf die Bestimmung der Beiwerte y_{kn} und m_{kn} hinausläuft.

Versteht man nun unter λ_{kn} den zur Eigenfunktion $\varphi_n(x)$ sowie zum Hauptträger (k) gehörigen Eigenwert, so gilt definitionsgemäß

$$EJ_k \frac{d^4 \varphi_n}{dx^4} = \lambda_{kn} \varphi_n. \tag{7}$$

Geht man jetzt mit den Ansätzen (4) bis (6) in die Gleichungen (1) bis (3) ein, so erhält man mit Rücksicht auf (7) das folgende, für jedes n gültige System von Beziehungen:

$$\lambda_{kn} y_{kn} = p_{kn} + \frac{m_{k-1,n} - 2m_{k,n} + m_{k+1,n}}{b}, \tag{8}$$

$$\lambda_{1n} y_1 = p_{1n} + \frac{m_{2n} - m_{1n}}{b}, \tag{9}$$

$$-\frac{6EJ_q m}{b^2 l}(y_{k-1,n} - 2y_{k,n} + y_{k+1,n}) = m_{k-1,n} + 4m_{kn} + m_{k+1,n}. \tag{10}$$

Die vorstehenden Gleichungen ließen sich ohne Schwierigkeiten für den Fall ungleicher Hauptträgerabstände und feldweise veränderlicher Querträgersteifigkeiten verallgemeinern, doch sind dadurch dem Problem kaum neue Gesichtspunkte abzugewinnen.

Die Endbedingungen der Hauptträger lassen sich am einfachsten durch geeignete Wahl der Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ befriedigen. Liegen z. B. gelenkig gestützte Hauptträger vor, so wird man offensichtlich mit dem Ansatz

$$\varphi_n = \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \lambda_{kn} = \frac{n^4 \pi^4 EJ_k}{l^4} \tag{11}$$

auskommen. Im Falle eines an den beiden Enden eingespannten Hauptträgers empfiehlt es sich, das Achsenkreuz zunächst in der Weise zu verschieben, daß die Hauptträger-Auflager

durch $x = \pm l/2$ festgelegt sind. Dann gilt

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &= \mathfrak{Sin}\frac{\varkappa_n}{2}\sin\frac{\varkappa_n x}{l} + \sin\frac{\varkappa_n}{2}\mathfrak{Sin}\frac{\varkappa_n x}{l} \quad \text{für } n = 1, 3, 5, \ldots, \\ \varphi_n &= \mathfrak{Cof}\frac{\varkappa_n}{2}\cos\frac{\varkappa_n x}{l} + \cos\frac{\varkappa_n}{2}\mathfrak{Cof}\frac{\varkappa_n x}{l} \quad \text{für } n = 2, 4, 6, \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

wobei die Werte $\varkappa_n$ durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\frac{\varkappa_n}{2} - \mathfrak{Tg}\frac{\varkappa_n}{2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg}\frac{\varkappa_n}{2} + \mathfrak{Tg}\frac{\varkappa_n}{2} = 0 \tag{13}$$

und die Eigenwerte durch den Ausdruck

$$\lambda_{nk} = \frac{\varkappa_n^4 E J_k}{l^4} \tag{14}$$

gegeben sind[1].

Die Auflagerbedingungen an den Enden der Querträgerzüge sind beim zweiseitig gelagerten Trägerrost bereits durch die Beziehung (9) ausgedrückt. Bedeutet dann r die Anzahl der Hauptträger, so stehen den r Beiwerten m_k, sowie den $r-2$ Beiwerten y_k als Unbekannten $r-2$ Gleichungen der Form (8), 2 Gleichungen der Form (9) und schließlich $r-2$ Gleichungen der Form (10) gegenüber.

Das Verfahren zur eigentlichen Auflösung der Differenzengleichungen (8) bis (10) hängt wesentlich von der Art des vorliegenden Tragwerkes ab. Zwei Aufgaben, die Gelegenheit zur Anwendung von zwei verschiedenen Methoden bieten, sind Gegenstand der Abschnitte **3** und **5**.

3. Trägerrost mit wenigen Hauptträgern. Die r Hauptträger des zweiseitig gelagerten Trägerrostes nach Abb. 1 seien gelenkig gestützt. Es sei J das Trägheitsmoment eines mittleren Hauptträgers, J_1 dasjenige eines Randhauptträgers, und es sei ferner

$$J' = \frac{J_q m}{l}. \tag{15}$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\psi = \frac{\pi^4 E J}{l^3}, \qquad \psi_1 = \frac{\pi^4 E J_1}{l^3}, \qquad \psi' = \frac{E J' l}{b^3}, \tag{16}$$

so nehmen die Grundgleichungen (8), (9) und (10) in Anbetracht von (11) die Gestalt

$$n^4 \psi y_k = p_k l + (m_{k-1} - 2m_k + m_{k+1})\frac{l}{b}, \tag{17}$$

$$n^4 \psi_1 y_1 = p_1 l + (m_2 - m_1)\frac{l}{b}, \tag{18}$$

$$-\frac{6\psi' b}{l}(y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}) = m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} \quad (k = 2, 3, \ldots, r-1) \tag{19}$$

an. Die zweiten Zeiger n bei y_k, p_k und m_k wurden hier der kürzeren Schreibweise wegen unterdrückt. Das eventuell vorgeschriebene Kragmoment am Randhauptträger (1) schreiben wir an in der Form

$$m_1 = -p_0 b. \tag{20}$$

Wir wollen den Gang der Berechnung am Beispiel einer Brücke mit 4 Hauptträgern veranschaulichen und dabei eine ganz beliebige Belastung der linken Hälfte der Brücke (Abb. 2c) ins Auge fassen. Als erstes soll diese Belastung in einer hinsichtlich der Brückenachse symmetrischen und antimetrischen Anteil zerlegt werden.

Der symmetrische Belastungszustand nach Abb. 2a liefert mit Rücksicht auf $y_3 = y_2$ und $m_3 = m_2$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} n^4 \psi_1 y_1 &= \frac{p_0 l}{2} + \frac{p_1 l}{2} + \frac{m_2 l}{b}, \\ n^4 \psi y_2 &= \frac{p_2 l}{2} - \frac{p_0 l}{2} - \frac{m_2 l}{b}, \\ \frac{6\psi' b}{l}(y_1 - y_2) &= \frac{p_0 b}{2} - 5m_2. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

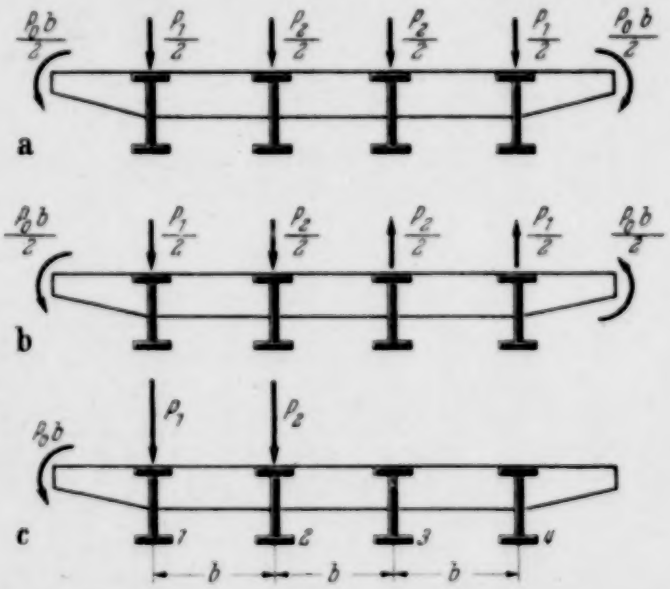

Abb. 2. Symmetrischer, antimetrischer und resultierender Belastungszustand des Trägerrostes mit 4 Hauptträgern.

[1] Die Werte $\varkappa_n$ findet man z. B. im Handbuch der Physik, Bd. 6, S. 361. Berlin 1928.

Der antimetrische Zustand nach Abb. 2b führt wegen $y_3 = -y_2$ und $m_3 = -m_2$ auf das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} n^4 \psi_1 y_1 &= \frac{p_0 l}{2} + \frac{p_1 l}{2} + \frac{m_2 l}{b}, \\ n^4 \psi y_2 &= \frac{p_2 l}{2} - \frac{p_0 l}{2} - \frac{3 m_2 l}{b}, \\ \frac{6 \psi' b}{l}(y_1 - 3 y_2) &= \frac{p_0 l}{2} - 3 m_2 . \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Zur Auflösung jeder der beiden Gruppen (21) und (22) von Gleichungen genügt es, die Unbekannten y_1 und y_2 aus den beiden ersten Gleichungen einer Gruppe in die dritte Gleichung einzusetzen, wonach m_2 bestimmt wird. Die Addition der beiden Teillösungen ergbit dann die Gesamtlösung. Unter (27) bis (32) sind die auf diese und ähnliche Weise gewonnenen Formeln zur Berechnung von zweiseitig gelagerten Rosten mit 3 und 4 Hauptträgern zusammengestellt.

Für die Durchbiegung eines Hauptträgers (k) gilt dann allgemein

$$Y_k = \sum_{n=1}^{\infty} y_{kn} \sin \frac{n \pi x}{l} . \tag{23}$$

Die zugehörigen Biegungsmomente sind

$$\mathfrak{M}_k = \frac{\pi^2 E J_k}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 y_{kn} \sin \frac{n \pi x}{l} , \tag{24}$$

und der Näherungsausdruck für das am Hauptträger (k) auftretende Stützenmoment eines Querträgers mit der Ortskoordinate x lautet[1]

$$M_k = a \sum_{n=1}^{\infty} m_{kn} \sin \frac{n \pi x}{l} . \tag{25}$$

Wir machen schließlich von den Bezeichnungen

$$\alpha = \frac{\psi'}{\psi} = \frac{m J_q l^2}{\pi^4 J b^3} , \qquad \beta = \frac{\psi'}{\psi_1} = \frac{m J_q l^3}{\pi^4 J_1 b^3} \tag{26}$$

Gebrauch und bemerken hinsichtlich der nachstehenden Ausdrücke, daß die in den Klammern stehenden Beiwerte y und m sich auf die eingeklammerten (unteren) Vorzeichen beziehen.

a) Brücke mit 3 Hauptträgern:

$$y_{1n}(y_{3n}) = \left[\frac{(6\alpha + n^4) p_{1n} + 6\alpha p_{2n} + 1{,}5\, n^4 p_{0n}}{6\alpha + 3\beta + n^4} \underset{(-)}{+} (p_{1n} + p_{0n}) \right] \frac{l^4}{2\pi^4 n^4 E J_1} , \tag{27}$$

$$y_{2n} = \frac{6\beta p_{1n} + (6\beta + 2n^4) p_{2n} - 3 n^4 p_{0n}}{6\alpha + 3\beta + n^4} \frac{l^4}{2\pi^4 n^4 E J} , \tag{28}$$

$$m_{2n} = - \frac{3\beta p_{1n} - 6\alpha p_{2n} + (6\alpha + 3\beta - 0{,}5\, n^4) p_{0n}}{6\alpha + 3\beta + n^4} \frac{b}{2} . \tag{29}$$

b) Brücke mit 4 Hauptträgern:

$$y_{1n}(y_{4n}) = \left[\frac{(\alpha + \frac{5}{6} n^4) p_{1n} + \alpha p_{2n} + n^4 p_{0n}}{\alpha + \beta + \frac{5}{6} n^4} \underset{(-)}{+} \frac{(18\alpha + n^4) p_{1n} + 6\alpha p_{2n} + (12\alpha + \frac{1}{3} n^4) p_{0n}}{18\alpha + 2\beta + n^4} \right] \frac{l^4}{2\pi^4 n^4 E J_1} , \tag{30}$$

$$y_{2n}(y_{3n}) = \left[\frac{\beta p_{1n} + (\beta + \frac{5}{6} n^4) p_{2n} - n^4 p_{0n}}{\alpha + \beta + \frac{5}{6} n^4} \underset{(-)}{+} \frac{6\beta p_{1n} + (2\beta + n^4) p_{2n} + (4\beta - 2n^4) p_{0n}}{18\alpha + 2\beta + n^4} \right] \frac{l^4}{2\pi^4 n^4 E J} , \tag{31}$$

$$m_{2n}(m_{3n}) = - \left[\frac{\beta p_{1n} - \alpha p_{2n} + (\alpha + \beta - \frac{1}{6} n^4) p_{0n}}{\alpha + \beta + \frac{5}{6} n^4} \underset{(-)}{+} \frac{2\beta p_{1n} - 6\alpha p_{2n} + (6\alpha + 2\beta - \frac{1}{3} n^4) p_{0n}}{18\alpha + 2\beta + n^4} \right] \frac{b}{2} . \tag{32}$$

Was die Beiwerte p_n anbetrifft, so ist im Falle einer Einzellast P an der Stelle $x = \xi$ des Hauptträgers (k)

$$p_{kn} = \frac{2P}{l} \sin \frac{n \pi \xi}{l} \tag{33}$$

---

[1] Eine etwas genauere Formel erhält man aus (25), wenn man das $\sin \frac{n \pi x}{l}$ durch den Ausdruck

$$\frac{1}{12} \left[\sin \frac{n \pi}{l} (x - a) + 10 \sin \frac{n \pi x}{l} + \sin \frac{n \pi}{l} (x + a) \right]$$

ersetzt. Der Unterschied ist praktisch so unbedeutend, daß die Benutzung der exakteren Formel sich kaum lohnt.

anzunehmen. Die Beiwerte für die nach einem beliebigen Gesetz $P_k(\xi)$ verteilte Belastung sind demgemäß

$$p_{kn} = \frac{2}{l}\int_0^l P_k(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi\,. \tag{34}$$

Soweit es sich um die Erfassung der Kragarmbelastung handelt, verdient noch die Ausrechnung der Summe (25) eine besondere Betrachtung. Greift am Ende eines Kragarmes mit der Ausladung b eine Einzellast P mit der Ortskoordinate $\xi = x$ an, so ergeben die Gleichungen (25), (29) und (33) für das Querträgermoment an dem mittleren der drei Hauptträger den divergenten Summenausdruck

$$M_2 = \frac{Pab}{l}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{0{,}5\,n^4 - 6\alpha - 3\beta}{n^4 + 6\alpha + 3\beta}\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,. \tag{35}$$

Im Sonderfall unendlich steifer Hauptträger gilt nun einerseits die vorstehende Summe, sofern hier $\alpha = \beta = 0$ gesetzt wird; andererseits ist dann nach der Theorie des Balkens auf drei starren Stützen einfach $M_2 = Pb/4$. Wir haben also im Sinne der Gleichung (35)

$$\frac{Pb}{4} = \frac{Pab}{l}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{2}\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,. \tag{36}$$

Bilden wir nun die Differenz der Summen (35) und (36), so kommen wir zu dem Ausdruck

$$M_2 = \frac{Pb}{4} - \frac{9\,Pb(2\alpha+\beta)}{2m}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{\sin^2\frac{n\pi x}{l}}{n^4 + 6\alpha + 3\beta}\,, \tag{37}$$

der sich bequem auswerten läßt. In ähnlicher Weise können wir im Falle eines Trägerrostes mit 4 Hauptträgern verfahren.

4. Numerisches Beispiel. Die Genauigkeit der soeben entwickelten Näherungsformeln wollen wir am Beispiel einer Brücke mit 4 Hauptträgern beurteilen. Die Grundrißmaße des Trägerrostes seien

$$l = 32\text{ m}, \qquad b = 2{,}5\text{ m}, \qquad a = l/4 = 8\text{ m},$$

und die relativen Trägheitsmomente der Träger mögen betragen

$$J = 6000, \qquad J_1 = 10000, \qquad J_q = 183\,.$$

Die mittels der Formeln (24), (30) und (31) berechneten und in der Tabelle 1 zusammengestellten Hauptträgermomente gelten für den Querschnitt in Trägermitte ($x = l/2$) und für die Belastung durch eine Einzellast $P = 1$ einmal in der Mitte ($\xi = l/2$) des Randhauptträgers 1 und dann in der Mitte des Hauptträgers 2. Unter Berücksichtigung von nur drei Reihengliedern ($n = 1, 3, 5,$) ergeben sich für die Momente der 4 Hauptträger zunächst gewisse Vorzahlen $\overline{\mathfrak{M}}_k$. Nun ist die Summe der Biegungsmomente aller Hauptträger der Brücke bei der angenommenen Lastenstellung

$$\sum \mathfrak{M}_k = \frac{1\cdot 32}{4} = 8{,}00\,.$$

Die Restglieder $n = 7, 9, \ldots$ lassen sich jetzt am einfachsten in der Weise berücksichtigen, daß man für die endgültigen Momente einfach

$$\mathfrak{M}_k = \frac{\Sigma\,\mathfrak{M}_k}{\Sigma\,\overline{\mathfrak{M}}_k}\,\overline{\mathfrak{M}}_k = \frac{8{,}00}{7{,}45}\,\overline{\mathfrak{M}}_k = 1{,}074\,\overline{\mathfrak{M}}_k \tag{38}$$

setzt. Diese Korrektur ist in der nachstehenden Tabelle 1 ebenfalls durchgeführt und die verbesserten Momentenwerte $\mathfrak{M}_k$ sind den Ergebnissen $\mathfrak{M}_k'$ der exakten Berechnung[1] gegenübergestellt.

Tabelle 1.

	k	$P=1$ über Mitte Hauptträger 1			$P=1$ über Mitte Hauptträger 2		
		$\overline{\mathfrak{M}}_k$	$\mathfrak{M}_k$	$\mathfrak{M}_k'$	$\overline{\mathfrak{M}}_k$	$\mathfrak{M}_k$	$\mathfrak{M}_k'$
Momente in Mitte Hauptträger	1	6,22	6,68	6,70	2,74	2,94	2,92
	2	1,64	1,76	1,74	2,63	2,82	2,84
	3	0,40	0,43	0,42	1,43	1,54	1,56
	4	−0,81	−0,87	−0,86	0,65	0,70	0,69
$\Sigma\,\overline{\mathfrak{M}}_k$		7,45			7,45		

[1] Vgl. Stahlbau-Kalender 1934, S. 342. Berlin 1943.

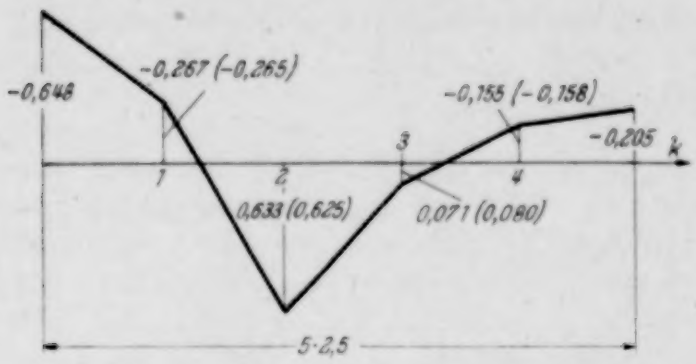

Abb. 3. Quereinflußlinie für das Stützmoment am Hauptträger 2 des Querträgers $x=l/2$ mit den nach der Näherungstheorie und (in Klammern) nach der exakten Theorie berechneten Ordinaten.

In Abb. 3 ist noch die nach (25) und (32) berechnete Quereinflußlinie für das am Hauptträger 2 auftretende Stützenmoment des Querträgers $x=l/2$ aufgetragen. Außer dem nach der Näherungstheorie, und zwar mit Beschränkung auf die Glieder $n=1, 3, 5$, errechneten Ordinaten sind (in Klammern) noch die Werte der exakten Theorie angeführt. Wie man sieht, genügt die Genauigkeit der mit bescheidenem Rechenaufwand gewonnenen Näherungsergebnisse allen praktischen Anforderungen.

5. Trägerrost mit sehr vielen Hauptträgern. Den Formeln (27 bis (32) analoge Ausdrücke lassen sich ohne Schwierigkeit auch für Trägerroste mit 5 und 6 Hauptträgern aufstellen. Bei sehr vielen gleichen Hauptträgern liegt es indessen nahe, die Differenzengleichungen (17) und (19) durch allgemeine Ansätze zu befriedigen suchen.

Wir beschränken uns auf den Fall unendlich vieler Träger $k=1, 2, 3, \ldots$, von denen nur der erste Träger ($k=1$) belastet werde, während der Zustand der Träger im Bereich $k<1$ zunächst dahingestellt sei (Abb. 4). Für $k \geqq 2$ gelten dann die beiden Differenzengleichungen (17) und (19), sofern nur in (17) $p_k=0$ gesetzt wird. Geht man nun mit den aus (17) gewonnenen Ausdrücken für y_{k-1} und y_{k+1} in (19) ein und beachtet noch den durch (26) definierten Festwert α, so erhält man für die Beiwerte m_k der Reihe (25) die Differenzengleichung

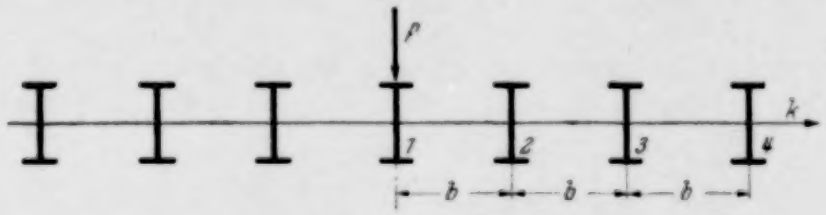

Abb. 4. Querschnitt durch einen Trägerrost mit sehr vielen Hauptträgern und einem belasteten Hauptträger 1.

$$6\,\alpha\, m_{k-2}+(n^4-24\,\alpha)\, m_{k-1}+(4\,n^4+36\,\alpha)\, m_k+(n^4-24\,\alpha)\, m_{k+1}+6\,\alpha\, m_{k+2}=0\,. \tag{39}$$

Setzt man

$$m_k = e^{-k\varrho}, \tag{40}$$

mit $\Re(\varrho)>0$ und bedient sich noch der Bezeichnung

$$\mu = \frac{n^4}{24\,\alpha} = \frac{n^4}{24\,m}\,\frac{J\,b^3}{J_q\,l^3}\,, \tag{41}$$

so erhält man für ϱ die Gleichung

$$\mathfrak{Cof}^2\,\varrho + 2(\mu-1)\,\mathfrak{Cof}\,\varrho + 4\,\mu + 1 = 0\,. \tag{42}$$

Es wird somit

$$\mathfrak{Cof}\,\varrho = 1-\mu \pm \sqrt{\mu^2-6\,\mu}\,. \tag{43}$$

Die weitere Behandlung der Aufgabe richtet sich nach dem Wert des Steifigkeitsfaktors μ. Es sind folgende drei Fälle möglich:

a) $\mu>6$. In diesem Bereich ist $\mathfrak{Cof}\,\varrho<0$. Setzt man somit $\varrho=\sigma+\pi i$ mit reellem σ, so ergeben sich für $\mathfrak{Cof}\,\sigma$ die beiden Wurzeln

$$\mathfrak{Cof}\,\sigma_1 = \mu-1+\sqrt{\mu^2-6\,\mu}\,, \qquad \mathfrak{Cof}\,\sigma_2 = \mu-1-\sqrt{\mu^2-6\,\mu}\,.$$

Hieraus folgt der für $k \geqq 1$ gültige Ausdruck

$$m_k = (C_1 e^{-k\sigma_1} + C_2 e^{-k\sigma_2})\,(-1)^k \tag{44}$$

mit den Integrationskonstanten C_1 und C_2. Der Wert y_k (für $k \geqq 2$) ist nun durch (17) gegeben, worin natürlich $p_k=0$ bleiben muß.

b) $\mu=6$. Nimmt man wieder $\varrho=\sigma+\pi i$ an, so erhält man für die Doppelwurzel $\mathfrak{Cof}\,\sigma_0=3$, und die zugehörige Lösung hat die Form

$$m_k = (C_1+C_2 k)\,e^{-k\sigma_0}\,(-1)^k \tag{45}$$

mit $\sigma_0=2{,}29243\ldots$ und $k \geqq 1$.

c) $\mu < 6$. Bei den niedrigsten (und somit den ausschlaggebenden) Werten n fällt die Zahl μ meist in diesen Bereich, der deswegen eine mehr ins einzelne gehende Betrachtung verdient. Mit dem Ansatz

$$\varrho = \sigma + i\tau \tag{46}$$

kommt man auf Grund von (42), auf die folgenden Ausdrücke:

$$\mathfrak{Cof}\, 2\sigma = 4\mu + 1 + \sqrt{12\mu^2 + 24\mu}\,, \qquad \cos 2\tau = 4\mu + 1 - \sqrt{12\mu^2 + 24\mu}\,. \tag{47}$$

Mit $\mathfrak{Cof}\, 2\sigma$ sind auch die Werte $e^{-2\sigma}$ und $e^{-\sigma}$ $(\sigma > 0)$ bestimmt; zur eindeutigen Festlegung von τ bedient man sich am besten der Beziehung $\cos\tau = (1-\mu)/\mathfrak{Cof}\,\sigma$, während $\sin\tau > 0$ angenommen werden darf. Für $k \geqq 1$ lautet nun die Lösung

$$m_k = (C_1 \cos k\tau + C_2 \sin k\tau)\, e^{-k\sigma}\,. \tag{48}$$

Die Konstanten C_1, C_2 dieses Ausdruckes wollen wir unter der Annahme bestimmen, daß der Trägerrost in Abb. 4 sich auch links vom Hauptträger 1 ins Unendliche erstreckt und mit Ausnahme dieses Trägers nirgends belastet ist. Der Träger 1 liegt nun in einer Symmetrieebene, und in Übereinstimmung mit (17) besteht somit die Beziehung

$$n^4 \psi y_1 = p_1 l + 2(m_2 - m_1)\frac{l}{b}\,. \tag{49}$$

Die Dreimomentengleichung (19), erst für $k=1$, dann für $k=2$ angeschrieben, liefert

$$\left.\begin{aligned} \frac{6\psi' b}{l}(y_1 - y_2) &= 2m_1 + m_2\,, \\ -\frac{6\psi' b}{l}(y_1 - 2y_2 + y_3) &= m_1 + 4m_2 + m_3\,. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

und wir sind nunmehr in der Lage, die drei noch fehlenden Größen y_1, C_1 und C_2 aus den Gleichungen (49) bis (50) zu ermitteln, da ja die Beiwerte m_1, m_2, y_2 und y_3 keine weiteren Unbekannten enthalten. Das Endergebnis dieser Rechnung lautet

$$C_1 = \frac{Z_1}{N} b p_1\,, \qquad C_2 = -\frac{Z_2}{N} b p_1\,, \tag{51}$$

worin zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} N = {} & \left[(7\varkappa^2 + 34\varkappa + 5)e^{-3\sigma} + (\varkappa^2 - 12\varkappa + 9)e^{-5\sigma} + e^{-7\sigma}\right]\sin\tau + \\ & + \left[(2\varkappa^2 - 6\varkappa - 8)e^{-4\sigma} + (\varkappa - 4)e^{-6\sigma}\right]\sin 2\tau + (2\varkappa + 3)e^{-5\sigma}\sin 3\tau\,. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

$$Z_1 = (3\varkappa - 1)e^{-\sigma}\sin\tau + (5\varkappa + 3)e^{-2\sigma}\sin 2\tau + (\varkappa - 3)e^{-3\sigma}\sin 3\tau + e^{-4\sigma}\sin 4\tau \tag{53}$$

und schließlich $\varkappa = 4\mu = n^4/6\,\alpha$ gesetzt ist. Der Ausdruck für Z_2 ergibt sich nun aus (53), indem das sinus überall durch cosinus ersetzt wird. Für den belasteten Hauptträger gelten abschließend die Momenten- und Verschiebungsbeiwerte

$$m_1 = \left[(5\varkappa + 3)e^{-2\sigma}\sin\tau + (\varkappa - 3)e^{-3\sigma}\sin 2\tau + e^{-4\sigma}\sin 3\tau\right]\frac{b p_1}{N} \tag{54}$$

und

$$y_1 = (1 - \lambda)\frac{p_1 l^4}{n^4 \pi^4 E J} \tag{55}$$

mit der weiteren Bezeichnung

$$\lambda = \frac{2}{N}\left[(8\varkappa + 2)e^{-3\sigma}\sin\tau + (\varkappa - 3)(e^{-4\sigma}\sin 2\tau - e^{-5\sigma}\sin\tau) + e^{-5t}\sin 3t - e^{-6t}\sin 2\tau\right]. \tag{56}$$

Im Sonderfalle einer Einzellast P in $x = \xi$ gilt für p_1 der frühere Ausdruck (33). Die eigentlichen Biegungsmomente und Durchbiegungen sind wieder nach den Grundformeln (23) bis (25) zu berechnen.

Wir nehmen nun eine symmetrisch zur Trägermitte verteilte Belastung an. Beschränken wir uns in erster Näherung auf das Reihenglied $n=1$ allein, so kann die vorhin eingeführte Größe λ (für $n=1$) als ein passendes Maß für das lastverteilende Vermögen des Trägerrostes

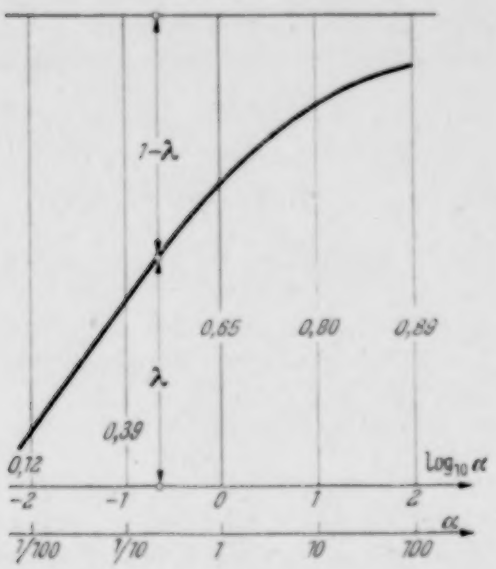

Abb. 5. Kennzahl λ für die lastverteilende Wirkung eines Trägerrostes mit vielen Hauptträgern abhängig vom Steifigkeitswert α.

angesehen werden. Ebenso ist $(1-\lambda)$ das ungefähre Verhältnis der vom belasteten Hauptträger übernommenen Last zu der Gesamtbelastung. Der Verlauf des Faktors λ (bzw. $1-\lambda$) in Abhängigkeit von dem logarithmisch aufgetragenen Steifigkeitswert α ist aus Abb. 5 ersichtlich.

Die Lösungen (44), (45), (48) lassen sich auch anderweitig anwenden. Wäre z. B. der belastete Hauptträger ($k=1$) Randträger eines unendlich erstreckten Trägerrostes ($k=1, 2, 3, \ldots$), so hätten wir lediglich die Integrationskonstanten C_1, C_2 dieser Lösungen neu zu berechnen.

6. Freie Schwingungen des Trägerrostes. Die Verwendung von Eigenfunktionen legt es nahe, die in den Abschnitten 2 und 3 entwickelte Theorie auf Schwingungsprobleme des zweiseitig gelagerten Trägerrostes auszudehnen.

Wir beschränken uns auf den Fall der auf Seite 394 behandelten Brücke mit 4 Hauptträgern. Es sei γ_k die schwingende Masse eines Hauptträgers (k) einschließlich der anfallenden Teile der Fahrbahn je Längeneinheit des Trägers. Ist weiter ω_n die zur Eigenfunktion $\sin n\pi x/l$ gehörige Kreisfrequenz der Schwingung, so brauchen wir, da zeitlich veränderliche äußere Kräfte fehlen, nur Trägheitskräfte vom Betrag

$$P_k(x,t) = \gamma_k \sum_{n=1}^{\infty} y_{kn}\, \omega_n^2\, e^{i\omega_n t} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

zu berücksichtigen. Gilt die Masse γ_1 für die Hauptträger 1 und 4, die Masse γ für die Hauptträger 2 und 3, so sind die Lastbeiwerte aller dieser Träger (Abb. 2), von der Zeitfunktion $e^{i\omega_n t}$ abgesehen, die folgenden: $p_{1n}=\gamma_1\omega_n^2 y_{1n}$, $p_{2n}=\gamma\omega_n^2 y_{2n}$, $p_{3n}=\gamma\omega_n^2 y_{3n}$ und $p_{4n}=\gamma_1\omega_n^2 y_{4n}$. Wir könnten jetzt je zwei Gleichungen von der Form (17), (18) und (19) anschreiben und hieraus unsere 4 Unbekannten y_k $(k=1, 2, 3, 4)$, sowie die 2 Unbekannten m_k $(k=2, 3)$ für jedes $n=1, 2, 3\ldots$ ermitteln. Angesichts der Symmetrie des Tragwerkes ist es jedoch viel bequemer, 6 neue, in folgender Weise erklärte Beiwerte einzuführen

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{y_1+y_4}{2}, \quad & \bar{\eta}_1 &= \frac{y_1-y_4}{2}, \quad & \eta_2 &= \frac{y_2+y_3}{2}, \quad & \bar{\eta}_2 &= \frac{y_2-y_3}{2}, \\ \mu &= \frac{m_2+m_3}{2}, \quad & \bar{\mu} &= \frac{m_2-m_3}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

Die Zeiger n sind sowohl in diesen als auch in den nachfolgenden Formeln unterdrückt. Das (hier nicht ausgeschriebene) System von 6 Gleichungen mit alten Unbekannten zerspaltet sich nach Einführung der neuen Unbekannten in die folgenden zwei Gruppen:

$$\left.\begin{aligned} n^4\psi_1\eta_1 &= \gamma_1 l\omega^2\eta_1 + \frac{l\mu}{b}, & n^4\psi_1\bar{\eta}_1 &= \gamma_1 l\omega^2\bar{\eta}_1 + \frac{l\bar{\mu}}{b}, \\ n^4\psi\eta_2 &= \gamma l\omega^2\eta_2 - \frac{l\mu}{b}, & n^4\psi\bar{\eta}_2 &= \gamma l\omega^2\bar{\eta}_2 - \frac{3l\bar{\mu}}{b}, \\ 6\psi' b(\eta_2-\eta_1) &= 5l\mu, & 2\psi' b(3\bar{\eta}_2-\bar{\eta}_1) &= l\bar{\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Eliminiert man aus (58) μ bzw. $\bar{\mu}$, so kommt man auf die nachstehenden, nur noch die Verschiebungsgrößen η enthaltenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \left(\gamma_1 l\omega^2 - n^4\psi_1 - \tfrac{6}{5}\psi'\right)\eta_1 + \tfrac{6}{5}\psi'\eta_2 &= 0, & (\gamma_1 l\omega^2 - n^4\psi_1 - 2\psi')\bar{\eta}_1 + 6\psi'\bar{\eta}_2 &= 0, \\ \tfrac{6}{5}\psi'\eta_1 + \left(\gamma l\omega^2 - n^4\psi - \tfrac{6}{5}\psi'\right)\eta_2 &= 0, & 6\psi'\bar{\eta}_1 + (\gamma l\omega^2 - n^4\psi - 18\psi')\bar{\eta}_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Sollen die Werte η nicht alle zugleich verschwinden, so muß die Nennerdeterminante jeder der beiden Gleichungsgruppen (59) Null sein, wodurch zwei separate Frequenzgleichungen zustande kommen. Die Wurzeln ω_1^2, ω_2^2 der zu η_1, η_2 gehörigen Frequenzgleichung beziehen sich auf eine zur Brückenachse symmetrische Schwingungsform des Trägerrostes, ebenso die zu

$\bar{\eta}_1$, $\bar{\eta}_2$ gehörigen Wurzeln ω_3^2, ω_4^2 auf eine antimetrische. Für die Schwingungsamplituden bestehen auf Grund von (59) die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eta_2}{\eta_1} &= \lambda_i \quad \text{mit} \quad \lambda_i = \frac{\frac{6}{5}\psi' + n^4\psi_1 - \gamma_1 l\omega_i^2}{\frac{6}{5}\psi'} \quad (i = 1, 2)\,, \\ \frac{\bar{\eta}_2}{\bar{\eta}_1} &= \lambda_j \quad \text{mit} \quad \lambda_j = \frac{2\psi' + n^4\psi_1 - \gamma_1 l\omega_j^2}{6\psi'} \quad (j = 3, 4)\,. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Die Verschiebungsgrößen η lassen sich jetzt in der Form

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= C_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2)\,, \\ \eta_2 &= \lambda_1 C_1 \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \lambda_2 C_2 \cos(\omega_2 t - \delta_2)\,, \\ \bar{\eta}_1 &= C_3 \cos(\omega_3 t - \delta_3) + C_4 \cos(\omega_4 t - \delta_4)\,, \\ \bar{\eta}_2 &= \lambda_3 C_3 \cos(\omega_3 t - \delta_3) + \lambda_4 C_4 \cos(\omega_4 t - \delta_4) \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

darstellen, worin die acht Größen C und δ Integrationskonstanten sind und die Beiwerte η selbst der Reihe nach für $n = 1, 2, 3 \ldots$ gelten. Bestimmt man noch die jeweiligen Beiwerte y_k aus (57) und setzt sie in die Summen (23) ein, so gewinnt man die vollständigen Ausdrücke für die Deformation aller vier Hauptträger.

Sind im allgemeinen Falle r Hauptträger von beliebiger Steifigkeit und mit beliebiger Massenverteilung auf die einzelnen Träger vorhanden, so läßt sich nach Elimination der Größen m_k ein System von r homogenen Gleichungen für die Unbekannten y_k aufstellen. Da nun die Beiwerte dieser Gleichungen die Größe ω^2 nur in der ersten und der nullten Potenz enthalten, so entsteht durch Nullsetzung der Nennerdeterminante eine Gleichung r-ten Grades, die r Wurzeln und ebensoviele Eigenwerte ω^2 für jedes n ergibt.

Im allgemeinen sind die Schwingungsfrequenzen von der Deformation der Querträger mit abhängig. Man wird also bei der Berechnung der Frequenzen nur solange zuverlässige numerische Ergebnisse erwarten können, als jede Halbwelle der zugehörigen Schwingungsform mindestens etwa drei lastverteilende Querträger enthält. Dies wird in der Regel wohl für die Grundschwingung ($n = 1$) zutreffen, nicht aber für Oberschwingungen, deren praktische Bedeutung meist auch eine untergeordnete ist.

7. Sonderfall der vier gleichen Hauptträger. Wir beziehen uns auf die Ergebnisse des vorigen Abschnittes und gehen nun auf den Fall $\gamma_1 = \gamma$, $\psi_1 = \psi$ etwas näher ein. Das erste der beiden Systeme (59) liefert dann für den symmetrischen Schwingungstypus die Frequenzen

$$\omega_0^2 = \frac{n^4\psi}{\gamma l} = \frac{n^4\pi^4 EJ}{\gamma l^4}\,, \qquad \omega_s^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{12\,\alpha}{5\,n^4}\right) \tag{62}$$

mit der früheren Bezeichnung $\alpha = \psi'/\psi$. Wählt man die Wurzel ω_0^2, so besteht nach (60) die Beziehung $\eta_1 = \eta_2$, während der Wurzel ω_s^2 die Beziehung $\eta_1 = -\eta_2$ zukommt. Man wird somit auf die beiden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= C_1 \cos(\omega_0 t - \delta_1) + C_2 \cos(\omega_s t - \delta_2)\,, \\ \eta_2 &= C_1 \cos(\omega_0 t - \delta_1) - C_2 \cos(\omega_s t - \delta_2) \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

geführt. Der antimetrische Schwingungstypus wird durch die zweite Gruppe der Gleichungen (59) festgelegt, und die zugehörigen Freuqenzen sind

$$\omega_0^2 = \frac{n^4\psi}{\gamma l} = \frac{n^4\pi^4 EJ}{\gamma l^4}\,, \qquad \omega_a^2 = \omega_0^2\left(1 + \frac{20\,\alpha}{n^4}\right). \tag{64}$$

In diesem Falle ist das Verhältnis der Amplituden $\bar{\eta}_1 = 3\,\bar{\eta}_2$ bzw. $\bar{\eta}_1 = -\frac{1}{3}\,\bar{\eta}_2$ und die Ausdrücke für die Verschiebungsbeiwerte lauten

$$\left.\begin{aligned} \bar{\eta}_1 &= 3\,C_3 \cos(\omega_0 t - \delta_3) + C_4 \cos(\omega_0 t - \delta_2)\,, \\ \bar{\eta}_2 &= C_3 \cos(\omega_0 t - \delta_3) - 3\,C_1 \cos(\omega_0 t - \delta_2)\,. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Die den Kreisfrequenzen (62) und (64) entsprechenden Schwingungsformen sind in Abb. 6 dargestellt. Werden die Schwingungen des Trägerrostes von der Deformation der Querträger

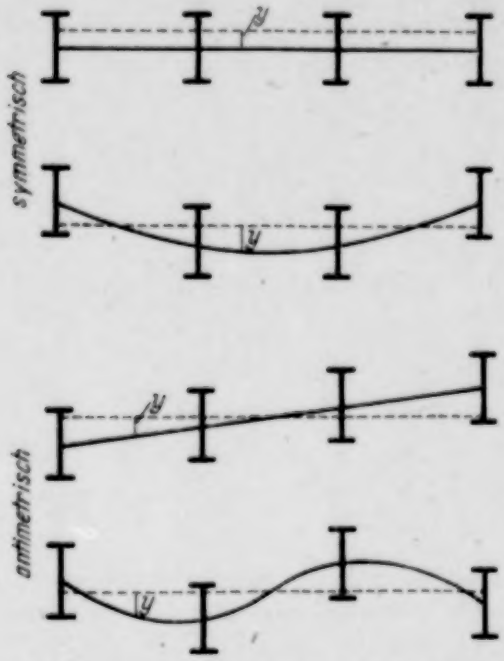

Abb. 6. Grundschwingungsformen der Querträger eines Trägerrostes mit 4 Hauptträgern.

begleitet, so fallen auch die zugehörigen Kreisfrequenzen, wie ω_s und ω_a, höher aus als die Frequenz ω_0 der Biegungsschwingungen eines einzelnen Hauptträgers.

Dem Eigenwert $n=1$ entspricht nach Abb. 6 eine Schwingungsform mit 0 bis 3 parallel zur Brückenachse verlaufenden Knotenlinien. Bei höheren Eigenwerten $n=2, 3, \ldots$ treten weitere Knotenlinien, die Parallelen zu den Querträgerachsen sind, auf. Durch Kombination von zwei und mehreren Schwingungsformen ließen sich aber auch polygonale Knotenlinien nachweisen — in naheliegender Analogie zu den Klangfiguren einer schwingenden Rechteckplatte. Natürlich würde diese Theorie nur bei relativ enger Querträgerteilung der Wirklichkeit nahekommen.

8. Die durch eine wandernde Einzellast erzwungenen Schwingungen. Wir behalten die speziellen Annahmen des vorigen Abschnittes, d. h. die Beziehungen $y_1=y$ und $\psi_1=\psi$ auch weiter bei. Die äußere Belastung sei nun eine Achslast $2P$ mit der Eigenmasse Null, die sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v in der Symmetrieebene der Brücke abrollt, so daß ein jeder der Hauptträger 2 und 3 eine wandernde Radlast P aufzunehmen hat (Abb. 2). Ist die Stellung der Last zur Zeit t durch $\xi=vt$ gegeben, so sind die Lastfunktionen der beiden inneren Träger

$$P_2(x,t)=P_3(x,t)=\frac{2P}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\nu t\,, \tag{66}$$

worin $\nu=\dfrac{n\pi v}{l}$ sein soll. Das System (21) nimmt nun in Anbetracht von $p_0=p_1=0$ und $\psi=\psi_1$ die folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} n^4\psi y_2 &= -\gamma l\ddot{y}_2+2P\sin\nu t-\frac{lm_2}{b}\,,\\ n^4\psi y_1 &= -\gamma l\ddot{y}_1+\frac{lm_2}{b}\,,\\ 6\psi' b(y_2-y_1) &= 5\,lm_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Sämtliche hierin enthaltenen Beiwerte y_k und m_2 sind Funktionen der Zeit t, Ausdrücke $\ddot{y}_k$ bedeuten die zweiten Ableitungen nach t und die Glieder $-\gamma l\ddot{y}_k$ sind die zugehörigen Massenkräfte. Eine Partikularlösung des Systems von Gleichungen (67) ist

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{\frac{12}{5}\psi'}{\gamma^2 l^2(\omega_0^2-\nu^2)(\omega_s^2-\nu^2)}P\sin\nu t\,,\\ y_2 &= \frac{\frac{12}{5}\psi'+2\gamma l(\omega_0^2-\nu^2)}{\gamma^2 l^2(\omega_0^2-\nu^2)(\omega_s^2-\nu^2)}P\sin\nu t\,. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Unter ω_0 und ω_s sind hier die durch die Formeln (62) gegebenen Kreisfrequenzen zu verstehen.

Den erzwungenen Schwingungen (68) sollen nun zwecks Erfüllung der Anfangsbedingungen des Ruhezustandes im Zeitpunkt $t=0$ freie Schwingungen

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= A\sin\omega_0 t+B\sin\omega_s t\,,\\ y_2 &= A\sin\omega_0 t-B\sin\omega_s t \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

von der Form (63) überlagert werden. Diese Zeitfunktionen genügen ebenso wie die Funktionen (68) der Anfangsbedingung $y_1=y_2=0$ bei $t=0$, und es bleibt nur noch übrig, die Freiwerte A und B so zu wählen, daß auch die zweite notwendige Anfangsbedingung, nämlich $\dot{y}_1=\dot{y}_2=0$ bei $t=0$, befriedigt wird. Die voll ausgeschriebene Gesamtlösung ist dann

$$Y_{2(1)}=\frac{P}{\gamma l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\omega_0\sin\nu t-\nu\sin\omega_0 t}{\omega_0(\omega_0^2-\nu^2)}\overset{+}{(-)}\frac{\omega_s\sin\nu t-\nu\sin\omega_s t}{\omega_s(\omega_s^2-\nu^2)}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}\,, \tag{70}$$

wobei das eingeklammerte Vorzeichen sich auf den eingeklammerten Zeiger bezieht.

Gäbe es keine lastverteilenden Querträger, so wäre $\alpha = 0$ anzunehmen, und man erhält dann sofort $\omega_0 = \omega_s$ und $Y_1 = 0$, während die Summe Y_2 in den bekannten Ausdruck[1] für die Durchbiegung eines einfachen Balkens übergeht, der durch eine wandernde Einzellast zu Schwingungen angeregt wird.

Unsere weiteren Ausführungen beziehen sich ausschließlich auf den unmittelbar belasteten inneren Hauptträger 2. Interessant ist vor allem der Effekt derjenigen Lastgeschwindigkeit v, die den Nenner eines der Reihenglieder (70) zum Verschwinden bringt. Wir beschränken uns auf das erste und praktsisch wichtigste Summenglied $n = 1$ und setzen darin zuerst $\pi v/l = v = \omega_0$ und dann $\pi v/l = v = \omega_s$. Der Grenzübergang unter der Annahme $v = \omega_0$ ergibt den folgenden (auf das erste Summenglied beschränkten) Näherungsausdruck für die Durchbiegung:

$$Y_0 \approx \frac{P}{\gamma l}\left[\frac{\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t}{2\omega_0^2} + \frac{\omega_s \sin\omega_0 t - \omega_0 \sin\omega_s t}{\omega_s(\omega_s^2 - \omega_0^2)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{71}$$

Setzt man hingegen $v = \omega_s$, so erhält man in ähnlicher Weise wie zuvor

$$Y_s \approx \frac{P}{\gamma l}\left[\frac{\sin\omega_s t - \omega_s t\cos\omega_s t}{2\omega_s^2} + \frac{\omega_0 \sin\omega_s t - \omega_s \sin\omega_0 t}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega_s^2)}\right]\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{72}$$

Den beiden vorstehenden Ausdrücken liegen die „kritischen" Geschwindigkeiten der Last $v = \omega_0 l/\pi$ bzw. $v = \omega_s l/\pi$ zugrunde, während für die Kreisfrequenzen die früheren Werte (62) einzusetzen sind.

Eine Nachrechnung zeigt, daß der erste der beiden vorstehenden Ausdrücke bei allen Steifigkeitsverhältnissen die größeren Durchbiegungen liefert. Im Falle eines einfachen Balkens erreicht der Pfeil der sinusförmigen Biegungslinie seinen Größtwert zu dem Zeitpunkt $t = v/\pi = l/v$, wo die Einzellast gerade die Brücke verläßt. Der Ausdruck (71) ergibt den größten Biegungspfeil, wenn t zwischen etwa $t = 0{,}9\, l/v$ und l/v liegt. Speziell mit $t = l/v$ kommt man zu dem Biegungspfeil

$$f_d \sim \frac{2PP}{\pi^4 EJ}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\sin\pi u}{24\alpha u}\right), \tag{73}$$

worin $u^2 = 1 + 12\,\alpha/5$ sein soll. Nun ist der Biegungspfeil eines mittleren Hauptträgers unter der angenommenen statischen Achslast $2P$ gemäß (31)

$$f_{st} \approx \frac{2Pf^3}{\pi^4 EJ}\,\frac{u^3+1}{2u^2}. \tag{74}$$

Der Näherungswert für den „dynamischen Faktor" des mittleren Hauptträgers im angenommenen Belastungsfall

$$\varphi_h = \frac{f_d}{f_{st}} \tag{75}$$

ist in Abb. 7 in Abhängigkeit von $\alpha = mJ_q l^3/\pi^4 Jb^3$ aufgetragen. Die Formel (73) konnte dabei nur in den Bereichen $\alpha < 0{,}3$ und $\alpha > 2$ benutzt werden, da sie im übrigen etwas zu kleine φ_h-Werte ergibt. Bei $\alpha = 0$ wird $\varphi_h = \pi/2$, welcher Wert dem dynamischen Verhalten eines einfachen Balkens entspricht. Man sieht, daß die φ_h-Kurve unter der betreffenden Waagerechten $\varphi_h = \pi/2$ liegt. Zumindestens also unter der Voraussetzung, die unserem Beispiel zugrunde liegen, werden die dynamischen Eigenschaften der Balkenträger durch den Einbau von lastverteilenden Querträgern wesentlich verbessert.

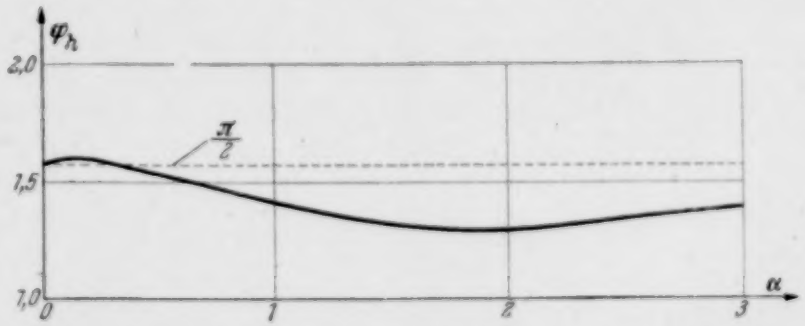

Abb. 7. Dynamischer Faktor φ_h eines mittleren Hauptträgers in Abhängigkeit vom Steifigkeitswert α.

Für den dynamischen Faktor der Querträger erweist sich die Lastgeschwindigkeit $v = \omega_s \pi l$ als maßgebend. Benützt man die letzte der Gleichungen (67) im Zusammenhang mit

[1] S. *Timoshenko*, Z. Math. Phys. 59 (1911) S. 163; siehe auch Handbuch der Physik, Bd. 6, S. 373. Berlin 1928.

(71) und (72), so erhält man für das Querträgermoment am mittleren Hauptträger unter beweglicher Last und im Zeitpunkt $t = l/v$ den Wert

$$M_d \approx \frac{6\pi\alpha}{5u^2} \frac{Pab}{l} \sin\frac{\pi x}{l}. \tag{76}$$

Das Moment unter der statischen Last ergibt sich auf Grund von (32) zu

$$M_{st} \approx \frac{12\alpha}{5u^2} \frac{Pab}{l} \sin\frac{\pi x}{l}. \tag{77}$$

Man erhält somit für den Querträger $\varphi_q = M_d/M_{st} = \pi/2$, unabhängig vom Steifigkeitsverhältnis α.

9. Zusammenfassung. Die lastverteilenden Querträger des Trägerrostes, deren Anzahl nicht allzu gering sein darf, werden zunächst durch eine gedachte drillungsfreie Platte von der gleichen Gesamtsteifigkeit auf Biegung, wie die aller Querträger zusammengenommen, ersetzt. Die Durchbiegungen und Belastungen der Hauptträger sowie die Stützenmomente der Platte lassen sich dann durch Summen über Eigenfunktionen darstellen, die den Schwingungsformen des vorliegenden Hauptträgersystems entsprechen. Für Entwicklungsbeiwerte, die die Einsenkungen und die Plattenmomente in der Ebene einzelner Hauptträger charakterisieren, bestehen dann *Clapeyron*sche Differenzengleichungen mit der Ordnungsnummer der Hauptträger als der unabhängigen Variablen. Bei statischen Aufgaben sind diese Gleichungen inhomogen und liefern nach ihrer Auflösung sämtliche Deformationsgrößen und Schnittkräfte des Trägerrostes. Ebenso führen Eigenschwingungsprobleme auf homogene Differenzengleichungen, und die Frequenzen werden hier durch Nullsetzen der zum Gleichungssystem gehörigen Nennerdeterminante gewonnen.

Da das Verfahren einerseits durch die Bevorzugung der einen Trägerrichtung gegen die andere, andererseits durch die Einführung von Eigenfunktionen gekennzeichnet ist, eignet es sich in erster Linie zur Berechnung von Brückentragwerken mit lastverteilender Fahrbahn unter statischer oder auch beweglicher Belastung. In der vorliegenden Arbeit kam es auch mehr darauf an, die praktische Brauchbarkeit der Methode in Anwendung auf verschiedene Einzelprobleme zu erproben, als diese Probleme selbst eingehend oder gar erschöpfend zu behandeln. Nach entsprechender Ergänzung ließe sich das Verfahren wahrscheinlich auch auf kompliziertere Probleme, so z. B. auf das Problem eines Trägerrostes mit drillungssteifen Trägern anwenden.

(Eingegangen am 22. November 1948.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Sergius Woinowsky-Krieger*, (16) Frankfurt a. M., Baseler Platz 6.

Druck von Stähle & Friedel, Stuttgart

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften

Herausgegeben von

Professor Dr. *S. Flügge*, Marburg a. d. Lahn — und — Professor Dr. *F. Trendelenburg*, Weil a. Rhein

unter Mitwirkung von

Professor Dr. *W. Bothe*, Heidelberg — Professor Dr. *F. Hund*, Jena — Professor Dr. *P. Harteck*, Hamburg

Einundzwanzigster Band

Mit 188 Abbildungen. III, 361 Seiten. 1945

DMark 48.—

Inhaltsverzeichnis:

Neuere Fortschritte der Theorie des inneren Aufbaues und der Entwicklung der Sterne. Von Dr. L. Biermann, Berlin-Babelsberg. — **Elektrische Leitfähigkeit der Metalle bei tiefen Temperaturen.** Von Professor Dr. E. Grüneisen, Marburg a. d. Lahn. — **Supraleitfähigkeit.** Von Regierungsrat Professor Dr. E. Justi, Berlin, und Dr. K. H. Koch, Wien. — **Anregungsstufen der leichten Atomkerne.** Von Dozent Dr. H. Volz, Erlangen. — **Die elektronenmikroskopische Untersuchung von Oberflächen.** Von Dr.-Ing. H. Mahl, Berlin-Reinickendorf. — **Die Messung mechanischer und akustischer Widerstände.** Von Professor Dr. K. Schuster, Breslau.

Soeben erschien:

Zweiundzwanzigster Band

Mit 195 Abbildungen. III, 332 Seiten

DMark 48.—

Inhaltsübersicht:

Transurane. Von Professor Dr. S. Flügge, Marburg. Mit 2 Abbildungen. — **Die Elektronenschleuder.** Von Professor Dr. H. Kopfermann, Göttingen. Mit 27 Abbildungen. — **Die Entwicklung der Elektronenlawine in den Funkenkanal** (nach Untersuchungen in der Nebelkammer). Von Professor Dr. H. Raether, Sceaux (Seine). Mit 24 Abbildungen. — **Molekulare Schallabsorption und -dispersion.** Von Professor Dr. H O. Kneser, Göttingen. Mit 46 Abbildungen. — **Röntgenbestimmungen der Atomanordnung in flüssigen und amorphen Stoffen.** Von Professor Dr. R. Glocker, Stuttgart. Mit 8 Abbildungen. — **Ursprung und Eigenschaften der kosmischen Strahlung.** Von Professor Dr. E. Bagge, Hamburg. Mit 41 Abbildungen. — **Ionosphäre.** Von Professor Dr. J. Zenneck, Althegnenberg (Obbay.).

Inhalt der Bände I bis XXII. — Namen- und Sachverzeichnis.

Der dreiundzwanzigste Band wird folgende Arbeiten enthalten:

Die Sonnencorona. Von Professor Dr. H. Siedentopf, Heidenheim/Brenz. — **Experimentelle Schwingungsanalyse.** Von Dr. W. Meyer-Eppler, Bonn. — **Schallreflexion, Schallbrechung und Schallbeugung.** Von Dr. A. Schoch, Göttingen. — **Seignette-Elektrizität.** Von Dr. H. Baumgartner, Dr. F. Jona und Dr. W. Känzig, Zürich. — **Die Theorie der Supraleitung.** Von Dr. H. Koppe, Göttingen. — **Röntgenspektroskopie der Valenzelektronen-Bänder in Krystallen.** Von Dr. H. Niehrs, Berlin.

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg

Lehrbuch der theoretischen Physik

Von Walter Weizel, Professor der Physik an der Universität Bonn.

Erster Band: **Physik der Vorgänge.** Bewegung, Elektrizität, Licht, Wärme. Mit 270 Textabbildungen. XIV. 771 Seiten. 1949. DMark 53.—, Ganzleinen DMark 56.90

Der Kauf des ersten verpflichtet zur Abnahme des zweiten Bandes.

Zweiter Band: In Vorbereitung.

Einführung in das Studium der theoretischen Physik

Von Dr. Richard Becker, Professor an der Universität Göttingen. Mit etwa 100 Abbildungen. Etwa 200 Seiten. Im Druck.

Einführung in die Physik

Von Robert Wichard Pohl, o. ö. Professor der Physik an der Universität Göttingen.

Erster Band: **Einführung in die Mechanik, Akustik und Wärmelehre.** Zehnte und elfte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 547 Abbildungen, darunter 8 entlehnten. VIII, 356 Seiten. 1947. DMark 21.—

Zweiter Band: **Einführung in die Elektrizitätslehre.** Dreizehnte und vierzehnte Auflage. Mit 497 Abbildungen, darunter 20 entlehnten. IV, 302 Seiten. 1949. DMark 18.60

Dritter Band: **Einführung in die Optik.** Siebente und achte Auflage. Mit 565 Abbildungen im Text und auf einer Tafel, darunter 18 entlehnten. IV, 356 Seiten. 1948. DMark 21.—

Kleines Lehrbuch der Physik ohne Anwendung höherer Mathematik

Von Wilhelm H. Westphal, Berlin. Mit 283 Abbildungen. VIII, 251 Seiten. 1948. Halbleinen DMark 9.60

Kurzes Lehrbuch der Physik

Von Professor Dr. H. A. Stuart, Hannover. Zweite und dritte Auflage. Mit 378 Abbildungen. VIII, 284 Seiten. 1949. Halbleinen DMark 15.—

Taschenbuch für Chemiker und Physiker

Herausgegeben von Dr.-Ing. Jean D'Ans, Professor an der Technischen Universität Berlin-Charlottenburg, und Dr. phil. Ellen Lax, Physikerin in Berlin. Mit 350 Abbildungen und graphischen Darstellungen. Zweite, berichtigte Auflage. VIII, 1896 Seiten. 1949. Ganzleinen DMark 36.—

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg

Druck von Großdruckerei Stähle & Friedel, Stuttgart. Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany.